

А. А. Альсевич С. Г. Красовский

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИИ ИНТЕГРАЛЫ ПРАКТИКУМ

*Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования
по математическим, физическим и экономическим
специальностям*

Минск

«Вышэйшая школа»
2021

УДК 517(075.8)

ББК 22.161я73

A57

Рецензенты: кафедра математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, доцент *А. А. Гринь*, рецензент доктор физико-математических наук, профессор *И. П. Мартынов*); профессор кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет» доктор физико-математических наук, профессор *А. И. Астровский*

Альсевич, Л.А.

A57 Математический анализ : последовательности, функции, интегралы : практикум : учебное пособие / Л. А. Альсевич, С. Г. Красовский. – Минск : Вышэйшая школа, 2021. – 471 с. : ил.

ISBN 978-985-06-3375-0.

Содержатся основные теоретические сведения о методе математической индукции, формуле бинома Ньютона, числовых последовательностях, пределе, непрерывности и дифференцируемости функций, исследовании функций с помощью производных и построении их графиков, а также о неопределенном и определенном интегралах. Предложены основные приемы решения типовых задач по этим темам. Изложение материала иллюстрируется подробно разобранными примерами. Представлено большое количество упражнений для самоконтроля, снабженных ответами. Приведены задачи для индивидуальных и контрольных заданий.

Для студентов учреждений высшего образования по математическим, физическим и экономическим специальностям. Может быть полезно преподавателям, аспирантам, магистрантам и студентам естественнонаучных специальностей, а также всем изучающим начальный курс высшей математики. Возможно использование пособия при дистанционном обучении.

УДК 517(075.8)

ББК 22.161я73

ISBN 978-985-06-3375-0

© Альсевич Л.А.,

Красовский С.Г., 2021

© Оформление. УП «Издательство
“Вышэйшая школа”», 2021

$\mathbb{N}$ множество натуральных чисел.

$\mathbb{Z}$ множество целых чисел.

$\mathbb{Z}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$\mathbb{Q}$ множество рациональных чисел.

$\mathbb{R}$ множество действительных чисел.

$\mathbb{C}$ множество комплексных чисел.

$[a; b], (a; b)$ отрезок, интервал с концами a и b .

$|a; b|$ промежуток с концами a и b (здесь может подразумеваться отрезок, интервал или один из полуинтервалов $[a; b)$ или $(a; b]$).

$\forall$ квантор всеобщности ($\forall x \in A$ для всех x из множества A ; $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ для любых действительных x , не равных нулю).

$\exists$ квантор существования ($\exists y \in A$ существует y , принадлежащее множеству A ; $\exists y, y > 1$ найдется y , большее 1).

— равно по определению (синоним $\stackrel{\text{def}}{=}$).

$=::$ обозначим через.

$:=$ положим равным.

$\Rightarrow, \Leftarrow$ знаки логического следования.

$\Leftrightarrow$ знак равносильности.

$f : X \rightarrow Y$ функция f , заданная на множестве X со значениями во множестве Y .

$f \circ g$ композиция функций (сложная функция, суперпозиция), т. е. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

$|\cdot|$ модуль; $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

$\ln(x), \ln x$ натуральный логарифм; $\ln x = \log_e x$.

e основание натурального логарифма, математическая константа, иррациональное и трансцендентное число. Приблизительно равно 2,71828.

$\exp(x)$ экспонента; $\exp(x) = e^x$.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ факториал числа $n \in \mathbb{Z}_0$ ($0! = 1$).

$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots 2n$ двойной факториал, $(2n)!! = 2^n \cdot n!$.

$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$ двойной факториал:

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = \frac{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}{2^n}.$$

$A : m$ A кратно m , A делится на m нацело.

$\sum$ сигма, знак суммирования: $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$;

k индекс суммирования. Значение суммы не зависит от того, какой буквой обозначают индекс суммирования:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{s=1}^n a_s = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ бесконечная сумма, ряд.

$\prod_{k=1}^n b_k = b_1 \cdot b_2 \cdots b_n$ произведение.

$\prod_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 \cdot b_2 \cdots b_n \cdots$ бесконечное произведение.

$\int f(x) dx$ неопределенный интеграл (совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на рассматриваемом числовом промежутке).

$\int_a^b f(x) dx$ определенный интеграл Римана от функции f по отрезку $[a; b]$, где число a — нижний, а b — верхний предел интегрирования.

$= [\dots] =$ прерывание математических вычислений, в скобках указываются логические пояснения, формулы или свойства, используемые для дальнейших действий.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии рассматриваются классические понятия математического анализа: метод математической индукции, формула бинома Ньютона, числовые последовательности, предел, непрерывность и дифференцируемость функций, неопределенный и определенный интегралы. С одной стороны, эти понятия являются базовыми для всего курса математического анализа и широко используются в других дисциплинах математического цикла и приложениях. С другой стороны, с изучения этих вопросов начинается курс математического анализа, и пособие призвано способствовать адаптации студентов к самостоятельной работе.

Цель пособия — помочь студентам в изучении числовых последовательностей, функций, графиков функций, неопределенных и определенных интегралов, научить их решать типовые задачи на эти темы.

В настоящем пособии даются требуемые определения, приводятся теоретические положения, отмечаются основные свойства рассматриваемых объектов. Все это иллюстрируется подробным решением типовых задач и примеров. Для усвоения и закрепления пройденного материала предлагается значительное количество упражнений, снабженных ответами, что даст возможность быстро составить любые варианты контрольных заданий с учетом специальности и уровня подготовки студентов.

Данное учебное пособие написано на базе учебного пособия Альсевич Л.А., Красовского С.Г., Наумовича Н.А. «Математический анализ. Последовательности и функции. Практикум» (Минск: Вышэйшая школа, 2019). Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам — профессору А.И. Астровскому, профессору И.П. Мартынову и доценту А.А. Гриню за внимательное прочтение рукописи и ценные советы, позволившие улучшить пособие, а также сотрудникам кафедры высшей математики Белорусского государственного университета.

По написанию данного учебного пособия была проделана огромная предварительная работа авторами совместно с доцентами Нилом Федоровичем Наумовичем и Адольфом Федоровичем Наумовичем, безвременно ушедшими из жизни. Авторы выражают им особую признательность.

Авторы

ГЛАВА 1. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Утверждение $T(n)$ будет истинным для всех значений натуральной переменной n , если выполняются условия:

- 1) утверждение $T(n)$ истинно при $n = 1$;
- 2) из предположения, что $T(n)$ истинно при $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, следует, что $T(n)$ истинно и при $n = k + 1$.

Пример 1.1. Пользуясь методом математической индукции, доказать равенство

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{(n + 1)n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решение.

1. $n = 1 \Rightarrow 1 = \frac{(1 + 1) \cdot 1}{2}$, т. е. равенство верно.

2. Предположим, что равенство верно при $n = k$, т. е. $1 + 2 + \dots + k = \frac{(k + 1)k}{2}$.

Проверим истинность равенства при $n = k + 1$, т. е. покажем, что $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k + 2)(k + 1)}{2}$.

Рассмотрим левую часть последнего равенства и преобразуем ее к правой:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) &= \left[\text{на основании условия 2)} \right] = \\ &= \frac{(k + 1)k}{2} + (k + 1) = (k + 1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n + 1)n}{2}$ верно $\forall n \in \mathbb{N}$.

Пример 1.2. Пользуясь методом математической индукции, доказать равенство

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решение.

1. $n = 1 \Rightarrow 1^2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{6}$.

2. Предположим, что равенство верно при $n = k$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Покажем истинность при $n = k + 1$, т.е. что

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \left[\text{см. п. 2} \right] = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= (k+1) \left(\frac{k(2k+1)}{6} + k+1 \right) = (k+1) \frac{k(2k+1) + 6k+6}{6} = \\ &= (k+1) \frac{2k^2 + 7k + 6}{6} = \left[\text{так как } 2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3) \right] = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Получили правую часть. Следовательно, равенство верно $\forall n \in \mathbb{N}$.

Пример 1.3. Пользуясь методом математической индукции, доказать, что $(7^{2n} - 1) : 48 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, т.е. $7^{2n} - 1$ делится нацело на 48.

Решение. Покажем, что $7^{2n} - 1 = 48q$.

1. $n = 1 \Rightarrow 7^2 - 1 = 48 = 48 \cdot 1$.

2. Предположим, что $7^{2k} - 1 = 48q_1$ при $n = k$.

Покажем справедливость утверждения при $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 7^{2(k+1)} - 1 &= 7^{2k+2} - 1 = 7^{2k} \cdot 7^2 - 1 = 7^{2k}(48+1) - 1 = 7^{2k} \cdot 48 + 7^{2k} - 1 = \\ &= \left[(7^{2k} - 1) : 48, \text{ см. п. 2} \right] = 7^{2k} \cdot 48 + 48 \cdot q_1 = 48(7^{2k} + q_1) : 48. \end{aligned}$$

Следовательно, утверждение верно $\forall n \in \mathbb{N}$.

Пример 1.4. Пользуясь методом математической индукции, доказать неравенство $|\sin(n\alpha)| \leq n|\sin \alpha|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решение.

$$1. n = 1 \Rightarrow |\sin \alpha| \leq |\sin \alpha|.$$

2. Предположим, что неравенство верно при $n = k$:

$$|\sin(k\alpha)| \leq k|\sin \alpha|.$$

Докажем, что неравенство истинно при $n = k + 1$, т.е. покажем, что $|\sin((k + 1)\alpha)| \leq (k + 1)|\sin \alpha|$. Имеем

$$\begin{aligned} |\sin((k + 1)\alpha)| &= |\sin(k\alpha + \alpha)| = |\sin(k\alpha) \cos \alpha + \cos(k\alpha) \sin \alpha| \leq \\ &\leq \left[|a + b| \leq |a| + |b| \right] \leq |\sin(k\alpha) \cos \alpha| + |\cos(k\alpha) \sin \alpha| = \left[|ab| = |a||b| \right] = \\ &= |\sin(k\alpha)| |\cos \alpha| + |\cos(k\alpha)| |\sin \alpha| \leq \left[|\cos \alpha| \leq 1; |\cos(k\alpha)| \leq 1 \right] \leq \\ &\leq |\sin(k\alpha)| \cdot 1 + 1 \cdot |\sin \alpha| = \left[\text{см. п. 2} \right] \leq k|\sin \alpha| + |\sin \alpha| = (k + 1)|\sin \alpha|, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Следовательно, неравенство верно $\forall n \in \mathbb{N}$.

Пример 1.5. Доказать неравенство $\frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n + 1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Решение. Применим метод математической индукции.

$$1. n = 1 \Rightarrow \frac{1!!}{2!!} = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2 \quad \text{истинно.}$$

$$2. \text{ Предположим, что неравенство справедливо при } n = k, \\ \text{т.е. } \frac{(2k - 1)!!}{(2k)!!} < \frac{1}{\sqrt{2k + 1}}.$$

Покажем, что неравенство истинно при $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \frac{(2k + 1)!!}{(2k)!!} &= \frac{(2k - 1)!!(2k + 1)}{(2k)!!(2k + 2)} = \frac{(2k - 1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{2k + 1}{2k + 2} < \left[\text{см. п. 2} \right] < \\ &< \frac{1}{\sqrt{2k + 1}} \cdot \frac{2k + 1}{2k + 2} = \frac{\sqrt{2k + 1}}{2k + 2} < \left[\text{убедимся, что } \frac{\sqrt{2k + 1}}{2k + 2} < \frac{1}{\sqrt{2k + 3}}, \right] \end{aligned}$$

для этого построим цепочку равносильных неравенств:

$$\begin{aligned}\sqrt{2k+1} \cdot \sqrt{2k+3} < 2k+2 &\Leftrightarrow (2k+1)(2k+3) < (2k+2)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4k^2 + 8k + 3 < 4k^2 + 8k + 4 \Leftrightarrow 0 < 1 \Big] < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пример 1.6. Вывести формулу для суммы $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!$.

Решение. Вычислим несколько сумм и попробуем найти закономерность:

$$S_1 = 1 \cdot 1! = 1 \Rightarrow S_1 = 2! - 1;$$

$$S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5 \Rightarrow S_2 = 3! - 1;$$

$$S_3 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23 \Rightarrow S_3 = 4! - 1.$$

Следовательно, можно предположить, что $S_n = (n+1)! - 1$.

Докажем это, используя метод математической индукции.

1. $n = 1$ верно.

2. $n = k \Rightarrow S_k = (k+1)! - 1$, т.е. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$.

Покажем справедливость формулы для $n = k+1$:

$$\begin{aligned}S_{k+1} &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! = \left[\text{см. п. 2} \right] = \\ &= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = (k+1)!(1 + k + 1) - 1 = \\ &= (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1.\end{aligned}$$

Следовательно, $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что обобщением метода математической индукции является следующее высказывание.

Если:

1) утверждение $T(n)$ истинно при $n = m$, $m \in \mathbb{Z}$;

2) из предположения, что утверждение $T(n)$ верно при $n = k$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \geq m$), следует, что $T(n)$ истинно при $n = k+1$, то $T(n)$ истинно для всех n , $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq m$.

Пример 1.7. Доказать неравенство

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

Решение. Воспользуемся методом математической индукции.

1. $n = 2 \Rightarrow 1 + (1/\sqrt{2}) > \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 > (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 > 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} > 1$ верно.

2. $n = k \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}.$

Для $n = k + 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \left[\text{см. п. 2} \right] > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$ Покажем далее, что $\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}.$ Действительно,

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} \Leftrightarrow \sqrt{k(k+1)} + 1 > k + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k(k+1)} > k \Leftrightarrow k(k+1) > k^2 \Leftrightarrow k > 0.$$

Следовательно, $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$ при $n \geq 2$, что и требовалось доказать.

Пример 1.8. Выяснить, при каких $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $2^n > n^2 + n + 1$.

Решение. Рассмотрим несколько первых значений n :

$$n = 1 \Rightarrow 2 < 3;$$

$$n = 2 \Rightarrow 2^2 < 7;$$

$$n = 3 \Rightarrow 2^3 < 3^2 + 3 + 1;$$

$$n = 4 \Rightarrow 2^4 < 4^2 + 4 + 1;$$

$$n = 5 \Rightarrow 2^5 > 5^2 + 5 + 1 \Leftrightarrow 32 > 31.$$

Из проведенных вычислений следует, что при $n = 1, 2, 3, 4$ неравенство не выполняется, а при $n = 5$ выполняется.

Справедливость неравенства для натуральных чисел $n \geq 5$ проверим с помощью метода математической индукции.

1. $n = 5$ верно.

2. $n = k, k \geq 5: 2^k > k^2 + k + 1$.

Для $n = k + 1 \Rightarrow 2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > [\text{см. п. 2}] > 2(k^2 + k + 1)$.

Покажем далее, что $2(k^2 + k + 1) \geq (k + 1)^2 + (k + 1) + 1$ и тем самым что неравенство при $n = k + 1$ выполняется. Поскольку

$$\begin{aligned} 2(k^2 + k + 1) &\geq (k + 1)^2 + (k + 1) + 1 \Leftrightarrow 2k^2 + 2k + 2 \geq \\ &\geq k^2 + 3k + 3 \Leftrightarrow k^2 - k - 1 \geq 0 \Leftrightarrow k(k - 1) - 1 > 0 \end{aligned}$$

верно при всех $k \geq 5$, то неравенство $2^n > n^2 + n + 1$ справедливо при $n \geq 5, n \in \mathbb{N}$.

Пример 1.9. Доказать следующие равенства:

а) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), n \geq 2;$

б) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}), n \in \mathbb{N};$

в) $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \frac{a - b}{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}}, a > 0, b > 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

Решение.

а) Докажем равенство с помощью метода математической индукции.

1. $n = 2 \Rightarrow a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ верно.

2. $n = k \Rightarrow a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$

Для $n = k + 1 \Rightarrow a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - a^k b + a^k b - b^{k+1} = a^k(a - b) + b(a^k - b^k) = [\text{см. п. 2}] = a^k(a - b) + b(a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1}) = (a - b)(a^k + a^{k-1}b + a^{k-2}b^2 + \dots + ab^{k-1} + b^k),$ что и завершает доказательство.

б) Для доказательства равенства используем пример а), полагая $n := 2n + 1, b := -b:$

$$\begin{aligned} a^{2n+1} + b^{2n+1} &= \\ &= (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}). \end{aligned}$$

в) Воспользуемся формулой примера а), полагая $a := \sqrt[n]{a}, b := \sqrt[n]{b}$. Получим

$$a - b = (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a - b = (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \frac{a - b}{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}}.$$

Отметим, что формулы примера 1.9 используются в математическом анализе, в частности при вычислении пределов.

Упражнение 1.1. Применяя метод математической индукции, доказать равенства.

1. $1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{2^2} + \frac{15}{2^3} + \dots + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2^{1-n} + 2(n-1), \quad n \in \mathbb{N}.$
2. $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2 - 1)(3n + 2)}{12}, \quad n \in \mathbb{N},$
 $n \geq 2.$
3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$
4. $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}, \quad n \in \mathbb{N}.$
5. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$
6. $\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{n}{4(n+4)}, \quad n \in \mathbb{N}.$
7. $2 + 7 + 14 + \dots + (n^2 + 2n - 1) = \frac{n(2n^2 + 9n + 1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}.$
8. $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}, \quad n \in \mathbb{N}.$
9. $1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6},$
 $n \in \mathbb{N}.$
10. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1},$
 $n \in \mathbb{N}.$
11. $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$
12. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2},$
 $n \in \mathbb{N}.$

13. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + n(3n - 1) = n^2(n + 1), \quad n \in \mathbb{N}.$
14. $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{n(n + 1)}{2(2n + 1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$
15. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1), \quad n \in \mathbb{N}.$

Упражнение 1.2. Применяя метод математической индукции, доказать неравенства.

1. $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|, \quad n \in \mathbb{N}.$
2. $2^n > 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3.$
3. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$
4. $\frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \dots + \frac{1}{n + n} > \frac{13}{24}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$
5. $3n^2 \geq 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$
6. $\frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \dots + \frac{1}{3n + 1} > 1, \quad n \in \mathbb{N}.$
7. $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$
8. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Упражнение 1.3. Доказать следующие утверждения.

1. $(5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1}) : 59, \quad n \in \mathbb{N}.$
2. $(5^{n+3} \cdot 2^n - 125) : 45, \quad n \in \mathbb{N}.$
3. $(n^3 + 3n^2 + 5n) : 3, \quad n \in \mathbb{N}.$
4. $(10^n - 4^n + 3n) : 9, \quad n \in \mathbb{N}.$
5. $(4^n + 15n - 1) : 9, \quad n \in \mathbb{N}.$
6. $(7^{2n} + 7^n - 2) : 6, \quad n \in \mathbb{N}.$
7. $(17 \cdot 5^{2n} + 21 \cdot 6^n) : 19, \quad n \in \mathbb{N}.$
8. $(7^{3n} - 4^{3n}) : 31, \quad n \in \mathbb{N}.$
9. $(5^{n+3} + 11^{3n+1}) : 17, \quad n \in \mathbb{N}.$
10. $(9^{n+1} - 8n - 9) : 16, \quad n \in \mathbb{N}.$

ГЛАВА 2. СОЧЕТАНИЯ

Пусть имеется множество из n различных элементов. Количество его подмножеств, содержащих k элементов, называется *числом сочетаний* из n элементов по k элементов, $0 \leq k \leq n$.

Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k (читается: «число сочетаний из n по k », C — первая буква французского слова *combinaison* — сочетание). Из приведенного определения следует, что $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$.

Число сочетаний вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

После преобразования

$$\begin{aligned} C_n^k &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-k)(n-k+1) \cdots n}{k!(n-k)!} = \\ &= \frac{(n-k)!(n-k+1) \cdots n}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \end{aligned}$$

получим еще одну формулу для вычисления C_n^k :

$$C_n^k = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Свойства сочетаний

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Действительно,

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Пользуясь этим свойством, можно упрощать расчет числа сочетаний C_n^k в тех случаях, когда $k > n/2$, например:

$$C_{15}^{12} = C_{15}^{15-12} = C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455.$$

$$2. C_n^{k+1} + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} C_n^{k+1} + C_n^k &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} + \\ &+ \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k} \right) = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \frac{n+1}{(k+1)(n-k)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}. \end{aligned}$$

$$3. C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k.$$

Доказать самостоятельно.

Отметим, что для подсчета числа сочетаний при небольших n можно использовать так называемый треугольник Паскаля:

					1						
						1		1			
				1		2		1			
		1		3		3		1			
	1		4		6		4		1		
		1	5		10		10		5	1	
1		6		15		20		15		6	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Каждая из строк треугольника начинается и заканчивается единицей. Каждый элемент строки представляет собой сумму двух элементов, стоящих над ним.

Пример 2.1. Вычислить $\frac{C_{15}^9}{C_7^4 \cdot C_{13}^{10}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{C_{15}^9}{C_7^4 \cdot C_{13}^{10}} &= \left[C_n^k = C_n^{n-k} \Rightarrow C_{15}^9 = C_{15}^6, \quad C_7^4 = C_7^3, \quad C_{13}^{10} = C_{13}^3 \right] = \\ &= \frac{C_{15}^6}{C_7^3 \cdot C_{13}^3} = \left[\text{применим формулу } C_n^k = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \right] = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \right) / \left(\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right) = \frac{1}{2}.$$

Пример 2.2. Найти n , если $\frac{C_{2n}^{n+1}}{C_{2n+1}^{n-1}} = \frac{3}{5}$.

Решение. Так как

$$\begin{aligned} \frac{C_{2n}^{n+1}}{C_{2n+1}^{n-1}} &= \left(\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \right) / \left(\frac{(2n+1)!}{(n-1)!(n+2)!} \right) = \\ &= \frac{(2n)!(n+2)!}{(n+1)!(2n+1)!} = \frac{(2n)!(n+1)!(n+2)}{(n+1)!(2n)!(2n+1)} = \frac{n+2}{2n+1}, \end{aligned}$$

то получаем уравнение

$$\frac{n+2}{2n+1} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5(n+2) = 3(2n+1) \Rightarrow n = 7.$$

Пример 2.3. Найти все n , удовлетворяющие неравенству $2C_{n+1}^{n-1} + 3C_{n+1}^n \leq 24$.

Решение. Так как $C_{n+1}^{n-1} = C_{n+1}^2$, $C_{n+1}^n = C_{n+1}^1$ (см. свойство 1 сочетаний), то неравенство принимает вид

$$\begin{aligned} 2C_{n+1}^2 + 3C_{n+1}^1 &\leq 24 \Leftrightarrow 2 \frac{(n+1)n}{2} + 3(n+1) \leq 24 \Leftrightarrow n^2 + 4n + 3 \leq 24 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^2 + 4n - 21 \leq 0 \Leftrightarrow n^2 + 4n + 4 - 25 \leq 0 \Leftrightarrow (n+2)^2 - 5^2 \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (n+2+5)(n+2-5) \leq 0 \Leftrightarrow (n+7)(n-3) \leq 0. \end{aligned}$$

Так как $n+7 > 0$, то $n-3 \leq 0$. Таким образом, $n \in \{1, 2, 3\}$.

Пример 2.4. Найти множество значений функции $f(x) = C_{x+1}^{2x-8}$.

Решение. Множество допустимых значений x определяется системой

$$\begin{cases} x+1 \in \mathbb{N}, \\ 2x-8 \in \mathbb{Z}_0, \\ 2x-8 \leq x+1, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x+1 \geq 1, \\ 2x-8 \geq 0, \\ x \leq 9, \\ x \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq 4, \\ x \leq 9, \\ x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Этой системе удовлетворяют числа 4, 5, 6, 7, 8, 9. Вычислим значения функции при указанных x :

$$f(4) = C_5^0 = 1, \quad f(5) = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15, \quad f(6) = C_7^4 = C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35, \\ f(7) = C_8^6 = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28, \quad f(8) = C_9^8 = C_9^1 = 9, \quad f(9) = C_{10}^{10} = 1.$$

Таким образом, множество значений функции есть $\{1, 9, 15, 28, 35\}$.

Упражнение 2.1. Вычислить.

- $\left(\frac{1}{13}C_{13}^9 + \frac{1}{12}C_{10}^3\right)/(C_5^3 + C_3^2).$ (Ответ: 5).
- $C_{15}^9/(C_7^4 C_{13}^{10}).$ (Ответ: $1/2$).
- $(C_9^3 C_8^4)/(C_{10}^3 C_7^2).$ (Ответ: $7/3$).
- $C_{12}^2 - 3C_{10}^1 - C_7^4.$ (Ответ: 1).
- $(C_{13}^{11} - C_{11}^2 - 3C_{10}^2)/C_8^4.$ (Ответ: $-8/5$).
- $\left(\frac{1}{13}C_{14}^4 - C_8^4\right)/\left(\frac{1}{12}C_9^2 + \frac{1}{21}C_9^6\right).$ (Ответ: 1).
- $(C_{13}^9 - 6C_9^5 + C_{10}^2)/(C_{12}^8 - 7C_8^4 + C_4^0).$ (Ответ: $2/3$).
- $(2C_7^3 + 3C_5^2 - C_8^4)/(C_{11}^9 - C_{10}^9).$ (Ответ: $2/3$).
- $(C_8^3 + 2C_5^2 - C_9^2)/(C_{12}^9 - C_{10}^6).$ (Ответ: 4).
- $(C_{13}^3 + C_9^3)/(C_{15}^2 - 4C_{17}^{16}).$ (Ответ: 10).

Упражнение 2.2. Найти все n , удовлетворяющие условию.

- $\frac{1}{C_4^n} = \frac{1}{C_5^m} + \frac{1}{C_6^m}.$ (Ответ: $n = 2$).
- $C_{2n}^7 > C_{2n}^5.$ (Ответ: $n \in \mathbb{N}, n > 6$).
- $8C_{105}^n < 3C_{105}^{n+1}.$ (Ответ: $\{0, 1, \dots, 27\}$).
- $C_{n+1}^{n-1} < 21.$ (Ответ: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$).
- $C_{2n}^{n+1}/C_{2n+1}^{n-1} = 16/29.$ (Ответ: $n = 14$).
- $C_{n-1}^{n-2} = n^2 - 13.$ (Ответ: $n = 4$).
- $C_{n+1}^{n-2} - C_{n+1}^{n-1} \leq 10.$ (Ответ: $\{2, 3, \dots, 9\}$).
- $C_{n+1}^2/C_n^3 = 4/5.$ (Ответ: $n = 7$).
- $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 15(n+2).$ (Ответ: $n = 27$).

ГЛАВА 3. ФОРМУЛА НЬЮТОНА

Для любых чисел a и b и любого натурального n имеет место формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

или, кратко, $(a+b)^n = \sum_{j=0}^n C_n^j a^{n-j} b^j$, которую называют *формулой Ньютона* (или *формулой бинома Ньютона*).

В формуле Ньютона числа C_n^k называют еще *биномиальными коэффициентами*. Для вывода формулы Ньютона воспользуемся методом математической индукции.

$$1. \ n = 1 \Rightarrow a + b = C_1^0 a + C_1^1 b = a + b \quad \text{верно.}$$

$$2. \ n = k \Rightarrow (a+b)^k = \sum_{j=0}^k C_k^j a^{k-j} b^j.$$

Для $n = k+1 \Rightarrow$

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = \left[\text{см. п. 2} \right] = (a+b) \sum_{j=0}^k C_k^j a^{k-j} b^j =$$

$$= \left[\text{перемножим} \right] = \sum_{j=0}^k C_k^j a^{k+1-j} b^j + \sum_{j=0}^k C_k^j a^{k-j} b^{j+1} =$$

$$= \left[\text{запишем отдельно слагаемые: в первой сумме}$$

$$\text{при } j=0, \text{ во второй сумме при } j=k \right] =$$

$$= C_k^0 a^{k+1} b^0 + \sum_{j=1}^k C_k^j a^{k+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j a^{k-j} b^{j+1} + C_k^k a^0 b^{k+1} =$$

$$= \left[C_k^0 = 1 = C_{k+1}^0, \ C_k^k = 1 = C_{k+1}^{k+1} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= C_{k+1}^0 a^{k+1} + \sum_{j=1}^k C_k^j a^{j+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j a^{k-j} b^{j+1} + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1} = \\
&= \left[\text{рассмотрим } \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j a^{k-j} b^{j+1} = \left[\begin{array}{l} j+1=l, \quad j=0 \Rightarrow l=1, \\ j=k-1 \Rightarrow l=k \end{array} \right] = \right. \\
&\quad = \sum_{l=1}^k C_k^{l-1} a^{k-(l-1)} b^l = \sum_{l=1}^k C_k^{l-1} a^{k+1-l} b^l = \left[l:=j \right] = \\
&\quad = \sum_{j=1}^k C_k^{j-1} a^{k+1-j} b^j \left. \right] = C_{k+1}^0 a^{k+1} + \sum_{j=1}^k C_k^j a^{k+1-j} b^j + \\
&+ \sum_{j=1}^k C_k^{j-1} a^{k+1-j} b^j + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1} = \left[\text{приведем подобные члены} \right] = \\
&= C_{k+1}^0 a^{k+1} + \sum_{j=1}^k (C_k^j + C_k^{j-1}) a^{k+1-j} b^j + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1} = \\
&= \left[\text{см. свойство 2 сочетаний (гл. 2): } C_n^j + C_n^{j-1} = C_{n+1}^j \right] = \\
&= C_{k+1}^0 a^{k+1} + \sum_{j=1}^k C_{k+1}^j a^{k+1-j} b^j + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j a^{k+1-j} b^j.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j a^{k+1-j} b^j.$$

Это означает справедливость формулы при $n = k+1$. Следовательно, формула Ньютона доказана.

Отметим, что число слагаемых в формуле Ньютона равно $n+1$, т. е. на единицу больше степени бинома.

Если в формуле Ньютона заменим $b := -b$, то получим

$$(a - b)^n = \sum_{j=0}^n C_n^j a^{n-j} (-b)^j = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j a^{n-j} b^j$$

или, в развернутом виде,

$$(a - b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 - \dots \\ \dots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + (-1)^n C_n^n b^n.$$

Свойства биномиальных коэффициентов

1. Так как $C_n^k = C_n^{n-k}$, то биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов разложения, равны. Поэтому считать биномиальные коэффициенты достаточно до $k \leq n/2$.

2. Формула $C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k$ позволяет вычислять биномиальные коэффициенты последовательно, т.е. $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^2 = n \frac{n-1}{2}$, $C_n^3 = n \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3}$ и т.д.

3. Так как $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$, то при $x = 1$ получим $2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$, т.е. сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n .

4. Так как $(1-x)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^k$, то, полагая $x = 1$, получим $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$. Таким образом, сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

5. Если обозначить $(k+1)$ -й член разложения через T_{k+1} , то $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, где $k = 0, \dots, n$.

6. k -я строка треугольника Паскаля представляет собой ряд чисел $C_k^0, C_k^1, C_k^2, \dots, C_k^k$ и дает набор биномиальных коэффициентов формулы Ньютона для $(a+b)^k$.

Внимание! В формуле Ньютона для $(a+b)^n$ первый коэффициент равен 1, второй равен степени бинома, все последующие подсчитываются по формуле $C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k$.

Пример 3.1. Записать в виде многочлена $(1+x)^6$, используя формулу Ньютона.

Решение. Всего слагаемых $6+1=7$, четвертое слагаемое это середина разложения (см. формулу $C_n^k = C_n^{n-k}$). Следовательно,

$$\begin{aligned}(1+x)^6 &= 1 + 6x + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}x^4 + 6x^5 + x^6 = \\ &= 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6.\end{aligned}$$

Пример 3.2. Записать $(x-1)^7$ в виде многочлена.

Решение. Воспользуемся формулой Ньютона. Число слагаемых $7+1=8$, следовательно, четвертое и пятое слагаемые будут иметь одинаковые биномиальные коэффициенты. Таким образом,

$$\begin{aligned}(x-1)^7 &= x^7 - 7x^6 + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}x^5 - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^4 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 - \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}x^2 + 7x - 1 = \\ &= x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1.\end{aligned}$$

Пример 3.3. Найти пятый член разложения $(z^{1/2} - z^{2/3})^{12}$.

Решение.

$$T_5 = C_{12}^4 (z^{1/2})^{12-4} (z^{2/3})^4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} z^4 z^{8/3} = 495 z^{20/3}.$$

Пример 3.4. Найти номер члена разложения $(x+x^{-2})^{12}$, не содержащего x .

Решение. Найдем член разложения, содержащий x^0 . Воспользуемся формулой $(k+1)$ -го члена разложения: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$. В данном случае $n=12$, $a=x$, $b=x^{-2}$. Поэтому $T_{k+1} = C_{12}^k x^{12-k} x^{-2k} = C_{12}^k x^{12-3k}$. Следовательно, $12-3k=0$, $k=4$. Таким образом, пятый член разложения не содержит x .

Пример 3.5. Найти коэффициент при x^8 в многочлене $(1+x^2-x^3)^9$.

Решение. Воспользуемся формулой Ньютона, полагая $a = 1 + x^2$, $b = -x^3$, $n = 9$. Тогда

$$((1 + x^2) + x^3)^9 = (1 + x^2)^9 - 9(1 + x^2)^8 x^3 + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} (1 + x^2)^7 x^6 + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — многочлен, степень которого ≥ 9 . Поэтому в дальнейшем это слагаемое нас не интересует. Далее, $(1 + x^2)^8$ будет содержать четные степени x , следовательно, $(1 + x^2)^8 x^3$ будет содержать только нечетные степени x . В итоге осталось проанализировать первое и третье слагаемые. Рассмотрим выражение $(1 + x^2)^9$ и выделим слагаемое, содержащее x^8 . Это $C_9^4 (x^2)^4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^8 = 126 x^8$. Далее рассмотрим $36(1 + x^2)^7 x^6$ и выделим слагаемое, содержащее x^8 . Это $36 \cdot 7 x^2 \cdot x^6 = 252 x^8$. Следовательно, коэффициент при x^8 равен $126 + 252 = 378$.

Пример 3.6. Найти номер наибольшего слагаемого в разложении $\left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\right)^{100}$.

Решение. Рассмотрим отношение

$$\begin{aligned} \frac{T_{k+1}}{T_k} &= \frac{C_{100}^k (9/10)^{100-k} (1/10)^k}{C_{100}^{k-1} (9/10)^{100-(k-1)} (1/10)^{k-1}} = \frac{C_{100}^k (9/10)^{100-k} (1/10)^k}{C_{100}^{k-1} (9/10)^{101-k} (1/10)^{k-1}} = \\ &= \frac{C_{100}^k}{C_{100}^{k-1}} (9/10)^{-1} (1/10)^1 = \frac{C_{100}^k}{9 C_{100}^{k-1}} = \left[\text{см. свойство 2 биномиальных} \right. \end{aligned}$$

коэффициентов: $C_n^{m+1} = \frac{n-m}{m+1} C_n^m$, в котором $n = 100$, $m+1 = k$,

$$\left. m = k-1 \right] = \frac{100 - k + 1}{k} \frac{C_{100}^{k-1}}{9 C_{100}^{k-1}} = \frac{100 - k + 1}{9k} = \frac{101 - k}{9k}.$$

Найдем все k , для которых $\frac{T_{k+1}}{T_k} > 1$. Поскольку $\frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{101 - k}{9k}$, то $\frac{101 - k}{9k} > 1$, из чего следует, что

$$101 - k > 9k \Rightarrow 10k < 101 \Rightarrow k < 10,1.$$

Таким образом, $\forall k \leq 10$ получим $T_{k+1} > T_k$. Следовательно, наибольшее слагаемое имеет номер 11.

Упражнение 3.1. Разложить по формуле Ньютона и упростить.

- $(a + 2b)^5$.
(Ответ: $a^5 + 10a^4b + 40a^3b^2 + 80a^2b^3 + 80ab^4 + 32b^5$).
- $(a - \sqrt{2})^6$.
(Ответ: $a^6 - 6\sqrt{2}a^5 + 30a^4 - 40\sqrt{2}a^3 + 60a^2 - 24\sqrt{2}a + 8$).
- $(1 - \sqrt{2})^5$.
(Ответ: $41 - 29\sqrt{2}$).
- $\frac{1}{27}(\sqrt{3} - \sqrt{15})^6$.
(Ответ: $64(9 - 4\sqrt{5})$).
- $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^8$.
(Ответ: $x^8 + 4x^6 + 7x^4 + 7x^2 + \frac{35}{8} + \frac{7}{4x^2} + \frac{7}{16x^4} + \frac{1}{16x^6} + \frac{1}{256x^8}$).
- $(x^2 - y)^6$.
(Ответ: $x^{12} - 6x^{10}y + 15x^8y^2 - 20x^6y^3 + 15x^4y^4 - 6x^2y^5 + y^6$).
- $(x^2 - 2x)^4$.
(Ответ: $x^8 - 8x^7 + 24x^6 - 32x^5 + 16x^4$).
- $(2 - \sqrt{2})^5$.
(Ответ: $4(58 - 41\sqrt{2})$).
- $(x - x^2)^4$.
(Ответ: $x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4$).
- $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\sqrt{x}\right)^6$.
(Ответ: $x^9 - 6x^7 + 15x^5 - 20x^3 + 15x - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^3}$).

Упражнение 3.2.

- Сумма биномиальных коэффициентов разложения $\left(\frac{n}{x} + \frac{x}{2n}\right)^n$ равна 256. Найти член, не содержащий x .
(Ответ: $35/8$).
- Сколько членов разложения $\left(2x\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)^{65}$ не содержит знаков корней?
(Ответ: 16).

3. Найти номер наибольшего слагаемого в разложении $\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right)^{50}$. (Ответ: 31-й).

4. Есть ли в разложении $\left(\frac{2x^2}{y} + \frac{y^2}{x}\right)^{32}$ члены, не содержащие переменные x и y ? Если есть, то каковы их номера?

(Ответ: таких членов нет).

5. При каких значениях x третье слагаемое разложения $(3 + 2x)^{15}$ больше каждого из соседних с ним членов?

(Ответ: $x \in (3/14; 9/26) \cup (-\infty; 0)$).

6. В разложении $(1 + 2x)^n$ отношение коэффициента при x^7 к коэффициенту при x^6 равно $\frac{10}{7}$. Сколько слагаемых имеет это разложение?

(Ответ: 12).

7. В какую натуральную степень следует возвести бином $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 3\right)$, чтобы отношение четвертого слагаемого разложения к третьему слагаемому было равно $3\sqrt{2}$?

(Ответ: $n = 5$).

8. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах в разложении $(ax + x^{-1/4})^n$, равна 512. Найти слагаемое, не содержащее x .

(Ответ: $45a^2$ ($n = 10$, 9-й член)).

9. Сколько слагаемых имеет разложение $\left(n + \frac{1}{n}\right)^n$, если произведение четвертого от начала и четвертого от конца слагаемых равно 14400?

(Ответ: 11 слагаемых).

10. Найти наибольший коэффициент многочлена $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x\right)^4$.

(Ответ: 27/64).

11. Сколько рациональных членов содержит разложение $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$?

(Ответ: 26).

ГЛАВА 4. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательностью называют числовую функцию натурального аргумента $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$, т.е. $n \mapsto f(n) =: a_n$.

Обозначают последовательность символом (a_n) или $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, a_n — n -й член последовательности.

Последовательность (a_n) называют *ограниченной сверху*, если существует число B такое, что $a_n \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример 4.1. Последовательность $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$ ограничена сверху числом $B = 1$, так как $\frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что данная последовательность ограничена сверху любым числом $B > 1$.

Последовательность (a_n) называют *ограниченной снизу*, если существует число b такое, что $a_n \geq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример 4.2. Последовательность $\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right) = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \dots, 1 - \frac{(-1)^n}{n}, \dots\right)$ ограничена снизу числом $b = 0$, так как $1 - \frac{(-1)^n}{n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что данная последовательность ограничена снизу любым отрицательным числом.

Если последовательность (a_n) ограничена и сверху, и снизу, то ее называют *ограниченной*.

Пример 4.3. Последовательность $\left(\frac{n}{n^2 + 1}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \dots, \frac{n}{n^2 + 1}, \dots\right)$ ограничена, так как существуют числа, например, $b = 0$ и $B = 1$ такие, что $0 \leq \frac{n}{n^2 + 1} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Последовательность (a_n) называют *возрастающей* (строго *возрастающей*), если $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a_{n+1} \geq a_n$ (неравенство $a_{n+1} > a_n$).

Последовательность (a_n) называют *убывающей* (строго *убывающей*), если $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a_{n+1} \leq a_n$ (неравенство $a_{n+1} < a_n$).

Убывающие и возрастающие последовательности называют *монотонными*, а строго убывающие и строго возрастающие — *строго монотонными*.

Пример 4.4. Последовательность $(a_n) = (2^n)$ строго возрастающая, так как $2^{n+1} > 2^n \quad \forall n \geq 1$, а последовательность $(a_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)$ строго убывающая, так как $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq 1$.

Последовательность $(a_n) = (a)$, $a \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, называют *постоянной*.

4.1. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность (α_n) называют *бесконечно малой последовательностью* (бмп), если

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_\varepsilon, \quad \forall n \geq \nu_\varepsilon \Rightarrow |\alpha_n| \leq \varepsilon,$$

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число ν_ε , зависящее от ε , что все члены последовательности с номерами $n \geq \nu_\varepsilon$ удовлетворяют неравенству $|\alpha_n| \leq \varepsilon$, которое равносильно двойному неравенству $-\varepsilon \leq \alpha_n \leq \varepsilon$.

Пример 4.5. Последовательность (α_n) с n -м членом $\alpha_n = 1/n$ является бесконечно малой, так как $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_\varepsilon = 1/\varepsilon, \quad \forall n \geq 1/\varepsilon \Rightarrow 1/n \leq \varepsilon$.

Свойства бесконечно малых последовательностей

1. Бесконечно малая последовательность ограничена.

2. Линейная комбинация с постоянными коэффициентами конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

3. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.

4. Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

5. Если бесконечно малая последовательность (α_n) является постоянной последовательностью, то $\alpha_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

6. Последовательность $(|\alpha_n|)$ является бесконечно малой последовательностью тогда и только тогда, когда (α_n) есть бесконечно малая последовательность.

7. Если $|\beta_n| \leq \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ и (α_n) — бесконечно малая последовательность, то и (β_n) — бесконечно малая последовательность.

8. Если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon$ такое, что выполняется неравенство $|\alpha_n| \leq M\varepsilon \quad \forall n \geq \nu_\varepsilon$, где M не зависит ни от ε , ни от n , то (α_n) — бесконечно малая последовательность.

4.2. СХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность (a_n) называют *сходящейся* или имеющей конечный предел, если $\exists a \in \mathbb{R}$ такое, что $a_n = a + \alpha_n$, где (α_n) — бесконечно малая последовательность.

Последовательность (a_n) сходится, если $\exists a \in \mathbb{R}$ такое, что $(a_n - a)$ — бесконечно малая последовательность.

Последовательность (a_n) сходится к a , если $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon, \forall n \geq \nu_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| \leq \varepsilon$.

Так как $|a_n - a| \leq \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon$, то это означает, что в ε -окрестности точки a находятся все члены последовательности (a_n) с номерами $n \geq \nu_\varepsilon$.

Число a называют *пределом последовательности* (a_n) и записывают $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ или $a_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$.

Из приведенного определения и определения бесконечно малой последовательности вытекает, что бесконечно малая последовательность (α_n) сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

Пример 4.6. Последовательность (a_n) с n -м членом $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ является сходящейся и ее предел равен 1.

Если последовательность (a_n) не является сходящейся, то ее называют *расходящейся*.

Свойства сходящихся последовательностей

1. Сходящаяся последовательность ограничена.
2. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.
3. Изменение конечного числа членов последовательности не нарушает сходимости и не меняет величины предела, если он существует.
4. Предел линейной комбинации с постоянными коэффициентами сходящихся последовательностей равен линейной комбинации пределов с этими же коэффициентами, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

В частности, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $c \in \mathbb{R}$.

5. Предел произведения сходящихся последовательностей равен произведению пределов, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n)$.

6. Предел частного сходящихся последовательностей равен частному пределов, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)/(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n)$, при условии, что $b_n \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$.

7. Если $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

8. Если $a_n \leq b_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Заметим, что если $a_n < b_n \quad \forall n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

4.3. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность (A_n) называют *бесконечно большой последовательностью* (ббп), если

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists v_\varepsilon, \quad \forall n \geq v_\varepsilon \Rightarrow |A_n| \geq \varepsilon.$$

В этом случае записывают $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$ или $A_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Пример 4.7. Последовательность (A_n) с n -м членом $A_n = \frac{n^2}{n+1}$ является бесконечно большой последовательностью, так как $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists v_\varepsilon = \varepsilon + 1, \quad \forall n \geq v_\varepsilon \Rightarrow |A_n| \geq \varepsilon$ в силу того, что

$$\frac{n^2}{n+1} \geq \frac{n^2-1}{n+1} = n-1 \geq \varepsilon \Rightarrow n \geq 1 + \varepsilon.$$

Среди бесконечно больших последовательностей выделяют последовательности, члены которых, начиная с некоторого номера, сохраняют знак.

Если (A_n) бесконечно большая последовательность и $A_n > 0$, начиная с некоторого номера, то пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = +\infty$ или $A_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, что равносильно $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists v_\varepsilon, \quad \forall n \geq v_\varepsilon \Rightarrow A_n \geq \varepsilon$.

Аналогично если (A_n) бесконечно большая последовательность и $A_n < 0$, начиная с некоторого номера, то пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = -\infty$ или $A_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$, что равносильно $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists v_\varepsilon, \quad \forall n \geq v_\varepsilon \Rightarrow A_n \leq -\varepsilon$.

Отметим, что бесконечно большая последовательность является расходящейся последовательностью.

Свойства бесконечно больших последовательностей

1. Если (α_n) бесконечно малая последовательность и $\alpha_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то $(1/\alpha_n)$ бесконечно большая последовательность.

2. Если (A_n) бесконечно большая последовательность и $A_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то $(1/A_n)$ бесконечно малая последовательность.

3. Произведение конечного числа бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность.

4. Сумма конечного числа бесконечно больших последовательностей одного знака есть бесконечно большая последовательность того же знака.

5. Если (A_n) бесконечно большая последовательность, а последовательность (a_n) удовлетворяет условию $|a_n| \geq \gamma > 0$, то $(A_n a_n)$ бесконечно большая последовательность. В частности, если последовательность (a_n) имеет конечный предел, отличный от нуля, то $(A_n a_n)$ бесконечно большая последовательность.

Последовательности разделяют на *сходящиеся* (имеющие конечный предел) и *расходящиеся* (не имеющие конечного предела). В то же время последовательности делятся на *имеющие предел* (конечный или бесконечный) и *не имеющие предела*.

4.4. ЭТАЛОННЫЕ ПРЕДЕЛЫ

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, |q| < 1.$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty, |q| > 1.$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1, q = 1.$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ не существует при $q = -1.$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, a > 1.$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0, a > 1.$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0.$
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a^\alpha n}{n^\beta} = 0, a > 1, \alpha, \beta > 0.$

4.5. НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ

Пример 4.8. Доказать, исходя из определения, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 5n + 1}{n^2 + n + 1} = 2.$$

Решение. Требуется доказать, что $\forall \varepsilon > 0, \exists v_\varepsilon, \forall n \geq v_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{2n^2 - 5n + 1}{n^2 + n + 1} - 2 \right| \leq \varepsilon.$

Рассмотрим $\left| \frac{2n^2 - 5n + 1}{n^2 + n + 1} - 2 \right|$ и проведем следующие преобразования и оценки:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2n^2 - 5n + 1}{n^2 + n + 1} - 2 \right| &= \frac{|2n^2 - 5n + 1 - 2n^2 - 2n - 2|}{n^2 + n + 1} = \frac{|-7n - 1|}{n^2 + n + 1} = \\ &= \frac{7n + 1}{n^2 + n + 1} \leq \frac{7n + 1}{n^2} \leq \frac{7n + n}{n^2} = \frac{8}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{8}{\varepsilon} =: v_\varepsilon. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } \forall \varepsilon > 0, \exists v_\varepsilon = \frac{8}{\varepsilon}, \forall n \geq v_\varepsilon = \frac{8}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{2n^2 - 5n + 1}{n^2 + n + 1} - 2 \right| \leq \varepsilon.$$

А это и означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 5n + 1}{n^2 + n + 1} = 2$.

Отметим, что оценки можно было проводить и иначе. Например,

$$\begin{aligned} \left| \frac{2n^2 - 5n + 1}{n^2 + n + 1} - 2 \right| &= \frac{|-7n - 1|}{n^2 + n + 1} = \frac{7n + 1}{n^2 + n + 1} \leq \frac{7n + 7}{n^2 + n} = \\ &= \frac{7}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{7}{\varepsilon} =: v_\varepsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда получим, что } \forall \varepsilon > 0, \exists v_\varepsilon = \frac{7}{\varepsilon}, \forall n \geq v_\varepsilon = \frac{7}{\varepsilon} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \frac{2n^2 - 5n + 1}{n^2 + n + 1} - 2 \right| \leq \varepsilon, \text{ т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 5n + 1}{n^2 + n + 1} = 2. \end{aligned}$$

При решении этого примера мы получили различные значения v_ε . Это означает, что в ε -окрестности точки 2 в первом случае попали члены последовательности, начиная с номера $n \geq \frac{8}{\varepsilon}$, а во втором с номера $n \geq \frac{7}{\varepsilon}$. Отметим, что конкретное значение v_ε несущественно. Важно, что существует хоть какое-нибудь v_ε , обладающее требуемым свойством.

Замечание. Проводимые при решении таких примеров оценки могут быть довольно грубыми. Главная цель — получить достаточно простое неравенство относительно n , причем решение его должно иметь вид $n \geq A(\varepsilon)$, где $A(\varepsilon)$ — некоторая функция от ε .

Пример 4.9. Доказать, исходя из определения, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) = 1.$$

Решение. Зададим $\varepsilon > 0$ и рассмотрим

$$\begin{aligned} & |\sqrt{n^2 + 2n} - n - 1| = |\sqrt{n^2 + 2n} - (n + 1)| = \\ & = [\text{домножим числитель и знаменатель на выражение,} \\ & \text{сопряженное числителю, т. е. на сумму } \sqrt{n^2 + 2n} + (n + 1); \\ & \text{в числителе получим разность квадратов}] = \\ & = \left| \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - (n + 1))(\sqrt{n^2 + 2n} + (n + 1))}{\sqrt{n^2 + 2n} + (n + 1)} \right| = \left| \frac{(n^2 + 2n) - (n + 1)^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + (n + 1)} \right| = \\ & = \left| \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{\sqrt{n^2 + 2n} + (n + 1)} \right| = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} + (n + 1)} \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0, \exists v_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}, \forall n \geq v_\varepsilon \Rightarrow |\sqrt{n^2 + 2n} - n - 1| \leq \varepsilon$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) = 1$.

Пример 4.10. Доказать, исходя из определения, что последовательность $\frac{n^2 - (-1)^n}{n + 1}$ является бесконечно большой.

Решение. Требуется доказать, что $\forall \varepsilon > 0, \exists v_\varepsilon, \forall n \geq v_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{n^2 - (-1)^n}{n + 1} \right| \geq \varepsilon$.

Рассмотрим $\left| \frac{n^2 - (-1)^n}{n + 1} \right| = \frac{n^2 - (-1)^n}{n + 1} \geq \frac{n^2 - 1}{n + 1} = n - 1 \geq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq 1 + \varepsilon$.

Положим $v_\varepsilon = 1 + \varepsilon$. Из решения следует, что $\forall n \geq v_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{n^2 - (-1)^n}{n + 1} \right| \geq \varepsilon$. А это и означает, что последовательность $\frac{n^2 - (-1)^n}{n + 1}$ является бесконечно большой.

Упражнение 4.1. Доказать справедливость следующих равенств, исходя из определения предела.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 5n}{2 + 10n} = -\frac{1}{2}.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + 1}} = 1.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{3n + 2} = \frac{2}{3}.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + 2\sqrt{n}}{n + 2} = 0.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n + 2}{n^2 + 2n + 2} = 0.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} + 1}{4n - 3} = +\infty.$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 3n^2}{6n^2 + 5} = -\frac{1}{2}.$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + 2n}} = 1.$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3}}{\sqrt{4n^2 - 1}} = \frac{1}{2}.$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 5^n - 4^n}{4^n + 5^n} = 4.$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 + (-1)^n)n}{2^n + n} = 0.$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}) = 0.$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 3\sqrt{n}) = +\infty.$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}} = +\infty.$$

4.6. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭТАЛОННЫХ ПРЕДЕЛОВ

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0,5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2/0,5} = 1.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{10} - 2}{1 + \sqrt[n]{0,001}} = \frac{1 - 2}{1 + 1} = -\frac{1}{2}.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3} - 1}{\sqrt[n]{9} - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3} - 1}{(\sqrt[n]{3} - 1)(\sqrt[n]{3} + 1)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{3} + 1)} = \frac{1}{2}.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{7n^3} + \sqrt[n]{7}}{3\sqrt[n]{n^2} + \sqrt[n]{3n}} = [\sqrt[n]{n^3} = (\sqrt[n]{n})^3] = \frac{1 + 1}{3 + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \lg n}{n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2 - 1} \frac{\lg n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 - 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n} =$$

$$1 \cdot 0 = 0.$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + \lg n}{n - 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \left(5 + \frac{\lg n}{n} \right)}{n \left(1 - \frac{3}{n} \right)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{\lg n}{n}}{1 - \frac{3}{n}} = \\
 &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{\lg n}{n} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n} \right)} = 5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_4(n^3 + 2)}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_4 n^3 \left(1 + \frac{2}{n^3} \right)}{n} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_4 n^3 + \log_4 \left(1 + \frac{2}{n^3} \right)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \log_4 n + \log_4 \left(1 + \frac{2}{n^3} \right)}{n} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \log_4 n}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_4 \left(1 + \frac{2}{n^3} \right)}{n} = 0 + 0 = 0, \text{ так как} \\
 \frac{\text{бмп}}{\text{ббп}} &= \text{бмп}.
 \end{aligned}$$

$$9. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{(n+1)n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)} \frac{3^n}{n!} = 0$$

как произведение ограниченной последовательности на бмп.

$$\begin{aligned}
 10. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n!}{2^n + (n+1)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \left(\frac{3^n}{n!} + 1 \right)}{(n+1)! \left(\frac{2^n}{(n+1)!} + 1 \right)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n}{n!} + 1 \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{(n+1)!} + 1 \right)} = 0 \cdot \frac{1}{1} = 0.
 \end{aligned}$$

4.7. ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность (b_k) называют подпоследовательностью последовательности (a_n) , если $\forall k \in \mathbb{N} \exists n_k \in \mathbb{N}$ такое, что $b_k = a_{n_k}$ и при этом $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Подпоследовательность последовательности (a_n) обычно обозначают символом (a_{n_k}) .

Если последовательность (a_n) имеет предел, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.

Если из последовательности (a_n) можно выделить две подпоследовательности, имеющие разные пределы, то последовательность (a_n) предела не имеет.

Пример 4.11. Показать, что последовательность $(a_n) = ((-1)^n)$ не имеет предела.

Решение. Построим две подпоследовательности: $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ и $a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = -1$, то последовательность (a_n) предела не имеет.

4.8. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательности (a_n) и (b_n) называют *эквивалентными* при $n \rightarrow \infty$ и обозначают $a_n \sim b_n$, $n \rightarrow \infty$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. В частности, если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a \neq 0$, то $a_n \sim a$, $n \rightarrow \infty$.

При нахождении пределов множители в числителе и знаменателе можно заменять эквивалентными, т. е. если $a_n \sim b_n$, $n \rightarrow \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n c_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n}$.

Пример 4.12. Показать, что многочлен $a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k$, где $a_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{0, k}$, $k \in \mathbb{Z}_0$, $a_0 \neq 0$, эквивалентен $a_0 n^k$ при $n \rightarrow \infty$.

Решение. Составим отношение и рассмотрим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k}{a_0 n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} \frac{1}{n} + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{a_k}{a_0} \frac{1}{n^k} \right) =$$

$$= \left[\text{предел суммы равен сумме пределов; } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^m} = 0 \text{ при } m > 0 \right] = 1$$

Следовательно, $a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k \sim a_0 n^k$, $n \rightarrow \infty$.

Пример 4.13. Доказать, что $\sqrt{n^2 + 2n + 3} + \sqrt{n^2 + n + 1} \sim 2n$ при $n \rightarrow \infty$.

Решение. Найдем

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + \sqrt{n^2 + n + 1}}{2n} = \\ & = \left[\text{разделим почленно на } n \text{ и внесем } n \text{ под знак корня} \right] = \\ & = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \right) = \\ & = \left[\text{предел суммы равен сумме пределов, } 1/n \rightarrow 0, \ 1/n^2 \rightarrow 0 \right. \\ & \quad \left. \text{при } n \rightarrow \infty \right] = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $\sqrt{n^2 + 2n + 3} + \sqrt{n^2 + n + 1} \sim 2n$ при $n \rightarrow \infty$.

4.9. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

При нахождении пределов арифметических комбинаций последовательностей часто встречаются ситуации, когда применение теорем о пределе суммы, частного, произведения и т. п. невозможно (даже в случае, когда пределы отдельных компонент комбинации существуют). Так, нахождение предела произведения $a_n b_n$ в случае, когда (a_n) бесконечно малая последовательность, а (b_n) бесконечно большая последовательность, может приводить к разным результатам. Например, если:

- 1) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$;
- 2) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n^3$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$;
- 3) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n^2$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.

Аналогично нельзя применить теоремы о пределах при отыскании $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$. Подобные выражения, где невозможно непосредственное применение теорем о пределах, называют неопределенными выражениями (неопределенностями). К ним относятся пределы, которые символически можно обозначить как $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $+\infty - (+\infty)$, и

некоторые другие. Так, под символической записью $\frac{0}{0}$ понимаем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$, где $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Аналогично и с другими неопределенностями. При разыскании пределов в таких ситуациях обычно помогают предварительные преобразования, замена эквивалентными, использование табличных пределов.

Пример 4.14. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n + 2}{n^3 + 1}$.

Решение. Так как $2n^3 - 3n + 2 \sim 2n^3$, $n^3 + 1 \sim n^3$, $n \rightarrow \infty$ (см. пример 4.12), то, заменяя эквивалентными числитель и знаменатель, получим $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n + 2}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{n^3} = 2$.

Пример 4.15. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \dots + b_k}$, где $a_j, b_i \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, k}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

Решение. Используя замену многочленов в числителе и знаменателе эквивалентными, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \dots + b_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^m}{b_0 n^k} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } m = k, \\ \infty, & \text{если } m > k, \\ 0, & \text{если } m < k. \end{cases}$$

Пример 4.16. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{4n^2 + 1} - 2n)$.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{4n^2 + 1} - 2n) = \left[\infty(\infty - \infty) \right] =$
 $\left[\text{умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное выражению в скобках, т.е. на } \sqrt{4n^2 + 1} + 2n \right] =$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(\sqrt{4n^2 + 1} - 2n)(\sqrt{4n^2 + 1} + 2n)}{\sqrt{4n^2 + 1} + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(4n^2 + 1 - 4n^2)}{\sqrt{4n^2 + 1} + 2n} =$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + 1} + 2n} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n} = \frac{1}{4}$, так как $\sqrt{4n^2 + 1} +$
 $+ 2n = 2n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4n^2}} + 1 \right) \sim 4n$ при $n \rightarrow \infty$.

Пример 4.17. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{2}{3^2 \cdot 5^2} + \dots + \frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2} + \dots + \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} \right).$$

Решение. С ростом n число слагаемых в n -м члене последовательности увеличивается. Поэтому нельзя воспользоваться теоремой о сумме пределов. Для нахождения предела преобразуем n -й член последовательности, представив каждое из слагаемых в виде разности с помощью равенства

$$\frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right).$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{2}{3^2 \cdot 5^2} + \dots + \frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} \right) + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right) + \dots + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right) \right) &= \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Пример 4.18. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} \right).$

Решение. Используя равенство

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1) - 1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!},$$

запишем каждое из слагаемых суммы, стоящей под знаком предела, в виде разности. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots - \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1.
\end{aligned}$$

Пример 4.19. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n} \right)$.

Решение.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n} \right) = (\infty - \infty) = \\
&= \left[\text{домножим и разделим на сопряженное выражение} \right] = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n} \right) \left(\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} + \sqrt{n} \right)}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} + \sqrt{n}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n + \sqrt{n}} - n}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} + \sqrt{n}} = \\
&= \left[\sqrt{n + \sqrt{n}} \sim \sqrt{n}, \quad \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} + \sqrt{n} \sim 2\sqrt{n}, \quad n \rightarrow \infty \right] = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Пример 4.20. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 3^{2n} + \lg(n+2)}{10^n - 3n^{10} + \lg(n^2+1)}$.

Решение. Так как $n^5 + 3^{2n} + \lg(n+2) \sim 3^{2n}$, $10^n - 3n^{10} + \lg(n^2+1) \sim 10^n$ при $n \rightarrow \infty$ (см. эталонные пределы, § 4.4), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 3^{2n} + \lg(n+2)}{10^n - 3n^{10} + \lg(n^2+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n}}{10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9}{10} \right)^n = 0$$

(см. пример 1 эталонных пределов, § 4.4, в котором полагаем $q = 9/10 < 1$).

Пример 4.21. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{2n} + n^2 + \log_6(n^{10} + 1)}{n! + 100^n + n^{99}}$.

Решение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{2n} + n^2 + \log_6(n^{10} + 1)}{n! + 100^n + n^{99}} = \left[\left(\frac{\infty}{\infty} \right), \quad 6^{2n} + n^2 + \log_6(n^{10} + 1) \sim 6^{2n}, \right. \\ \left. n! + 100^n + n^{99} \sim n! \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ см. примеры 5-7 эталонных пределов, § 4.4} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{2n}}{n!} = 0.$$

Пример 4.22. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n+2} \cos \frac{n^2+1}{n} + \frac{2n+1}{3n+2} \right)$.

Решение. Убедимся, что существует предел каждого из слагаемых. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$, а $\left(\cos \frac{n^2+1}{n} \right)$ ограниченная последовательность (см. свойство 3 бесконечно малых последовательностей, § 4.1), то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2} \cos \frac{n^2+1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$. Следовательно, предел каждого из слагаемых существует. Воспользуемся следующим свойством: предел суммы равен сумме пределов. В результате получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n+2} \cos \frac{n^2+1}{n} + \frac{2n+1}{3n+2} \right) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2} \cos \frac{n^2+1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3}.$$

Пример 4.23. Выяснить, при каких x последовательность (a_n) , где $a_n = \frac{2x+1}{3} + \frac{(2x+1)^2}{3^2} + \dots + \frac{(2x+1)^{2n}}{3^{2n}}$, сходится, и найти для таких x предел $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Решение. n -й член последовательности представляет собой сумму $2n$ слагаемых геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = \frac{2x+1}{3}$ и знаменателем $q = \frac{2x+1}{3}$. Так как $b_1 + b_1 q + \dots + b_1 q^{k-1} = \frac{b_1(1-q^k)}{1-q}$, $q \neq 1$, то

$$a_n = \frac{2x+1}{3} + \frac{(2x+1)^2}{3^2} + \dots + \frac{(2x+1)^{2n}}{3^{2n}} = \frac{2x+1}{3} \frac{1 - \left(\frac{2x+1}{3}\right)^{2n}}{1 - \frac{2x+1}{3}} =$$

$$= \frac{2x+1}{2-2x} \left(1 - \left(\frac{2x+1}{3}\right)^{2n}\right)$$

при условии $\frac{2x+1}{3} \neq 1$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{3}\right)^{2n} = 0$ при $q = \left(\frac{2x+1}{3}\right)^2 < 1$ (см. пример 1 эталонных пределов, § 4.4), а при $q > 1$ предел равен бесконечности, то последовательность сходится при условии

$$\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2 < 1 \Leftrightarrow |2x+1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x+1 < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 1.$$

Если же $\frac{2x+1}{3} = 1$, т.е. $x = 1$, то в этом случае получим $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1 + \dots + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n) = +\infty$. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{3} + \frac{(2x+1)^2}{3^2} + \dots + \frac{(2x+1)^{2n}}{3^{2n}} \right) = \frac{2x+1}{2(1-x)}$$

при $x \in (-2; 1)$, а для остальных x последовательность (a_n) расходится.

Пример 4.24. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{9} - 1}{\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} - 1}$.

Решение. Так как $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, то имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Преобразуем числитель и знаменатель:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{9} - 1}{\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{3})^2 - 1}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} - 1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{3} + 1)}{(\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{2} + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3} + 1}{\sqrt[3]{2} + 1} = \frac{1+1}{1+1} = 1.$$

Пример 4.25. Построить график функции

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x + x^{2n}}{1 + x^{2n}}.$$

Решение. Найдем предел, считая x параметром. Выражение под знаком предела определено для всех $x \in \mathbb{R}$. Так как $x^{2n} \rightarrow 0$ при $|x| < 1$, $x^{2n} \rightarrow +\infty$ при $|x| > 1$, то рассмотрим следующие случаи:

$$1) |x| < 1: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x + x^{2n}}{1 + x^{2n}} = \frac{2x + 0}{1 + 0} = 2x;$$

$$2) |x| > 1: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x + x^{2n}}{1 + x^{2n}} = \left[\left(\frac{\infty}{\infty} \right), \text{ замена эквивалентными} \right] = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{x^{2n}} = 1;$$

$$3) x = 1: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x + x^{2n}}{1 + x^{2n}} = \frac{2 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2};$$

$$4) x = -1: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x + x^{2n}}{1 + x^{2n}} = \frac{-2 + 1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Таким образом, } f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } |x| < 1, \\ 1, & \text{если } |x| > 1, \\ 3/2, & \text{если } x = 1, \\ -1/2, & \text{если } x = -1, \end{cases}$$

и график имеет следующий вид (рис. 1).

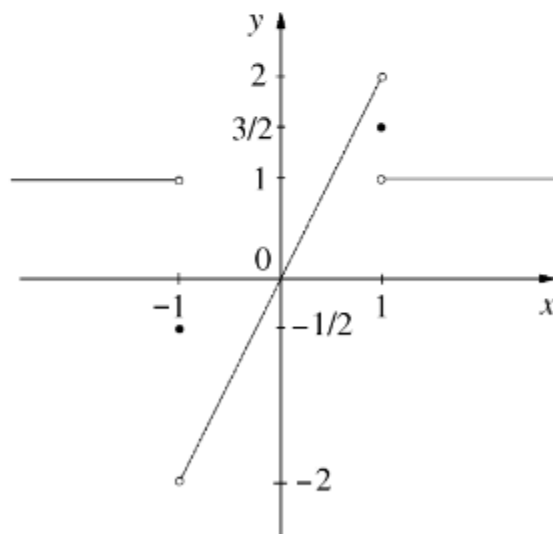


Рис. 1

Упражнение 4.2. Найти предел последовательностей.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$. (Ответ: 4).

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n+1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right)$. (Ответ: 1/2).

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2+3n+1} - 3n)$. (Ответ: 1/2).

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{16n^4+4n^2+1}}$. (Ответ: 1/8).

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+2)! + 3(n+1)!}{2(n+2)! - 3(n+1)!}$. (Ответ: 2).

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+4} + 2n)^2}{\sqrt[4]{n^8+n^4+16}}$. (Ответ: 9).

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+2n^2-2} + \sqrt[3]{n^4+n^2+1}}{\sqrt[4]{n^6+n^3+2} - \sqrt[5]{n^7+3n^3+7}}$. (Ответ: 1).

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^4 - (n+2)^4}{(n+1)^4 + (2n+1)^4}$. (Ответ: 15/17).

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^2-n^3} + n)$. (Ответ: 1/3).

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{9n^2+1} + \sqrt{4n^2+1}}$. (Ответ: -1/5).

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n+5} - \frac{n}{2} \right)$. (Ответ: -2).

Упражнение 4.3. Найти предел последовательностей.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n!}{\sqrt{n^3+n+1}}$. (Ответ: 0).

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) \sin(\ln n)$. (Ответ: 0).

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n + n^{10}}{n! + 20^n} (\sin n + \cos n)$. (Ответ: 0).

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^3 - n^3}{(n-1)^3 + n^3} \sin \frac{n!}{\sqrt{n+1}}$. (Ответ: 0).

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n}{5^n - n} \sin(3^n + 2^n)$. (Ответ: 0).

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\ln n} \sin(\cos \sqrt{n}).$ (Ответ: 0).
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 1}{n! + 1} \cos(n^2 + 1).$ (Ответ: 0).
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{2^n} \cos \frac{2^n}{n^2 + 2}.$ (Ответ: 0).
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^{n+3}} (4 + (-1)^{n+4}).$ (Ответ: 0).
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg(2 + \sqrt{n})}{2 + \sqrt{n}} \sin(\sqrt{n} + 2).$ (Ответ: 0).

4.10. ЧИСЛО e

Известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Справедливы следующие равенства:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n)^{1/\alpha_n} = e,$$

где (α_n) — бесконечно малая последовательность;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\beta_n}\right)^{\beta_n} = e,$$

где (β_n) — бесконечно большая последовательность.

Отметим, что в этих случаях имеется неопределенность вида (1^∞) .

Пример 4.26. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n+3}$.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n+3} =$

$$= \left[\frac{n+2}{n+1} \rightarrow 1, \quad 2n+3 \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ неопределенность } (1^\infty) \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)} \right)^{(2n+3)/(n+1)} =$$

$$= \left[(1 + \alpha_n)^{1/\alpha_n} \rightarrow e, \quad \frac{2n+3}{n+1} \rightarrow 2 \text{ при } n \rightarrow \infty \right] = e^2.$$

Пример 4.27. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - n + 5}{3n^2 + n + 5} \right)^{6n+1}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - n + 5}{3n^2 + n + 5} \right)^{6n+1} &= [1^\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2n}{3n^2 + n + 5} \right)^{6n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-2n}{3n^2 + n + 5} \right)^{\frac{3n^2+n+5}{-2n}} \right)^{\frac{(6n+1)(-2n)}{3n^2+n+5}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6n+1)(-2n)}{3n^2+n+5}} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n(-2n)}{3n^2}} = e^{-4}. \end{aligned}$$

Упражнение 4.4. Найти предел последовательностей.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 2n + 3}{2n^2 - 2n - 3} \right)^n$. (Ответ: e^2).

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 2n + 3}{3n^2 - 2n + 3} \right)^{3n+1}$. (Ответ: e^4).

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + n^2 + 1}{2^n + 2n^2 + 3} \right)^{2^n}$. (Ответ: 0).

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{2n+2}$. (Ответ: e^{-2}).

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n-2} \right)^{\frac{2n^2+n+1}{n+3}}$. (Ответ: $e^{8/3}$).

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 - 4n + 10} \right)^{\frac{(3n+1)(2-n)}{n}}$. (Ответ: e^{-18}).

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 2 \ln n}{n + 2} \right)^{\frac{2n(n+1)}{n \ln n + 4}}$. (Ответ: e^4).

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5 - 2n^2}{3 - 2n^2} \right)^{\frac{(n+1)^3}{n+3}}$. (Ответ: e^{-1}).
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4 - 2n}{n} \right)^{3n+4\sqrt{n}}$. (Ответ: e^{12}).
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{12 - 6n}{5 - 3n} - 1 \right)^{\frac{2n^3+n-13}{n^2+n+1}}$. (Ответ: $e^{-4/3}$).

4.11. КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Критерий. Для сходимости последовательности (a_n) необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной, т. е. чтобы для нее выполнялось условие Коши

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_\varepsilon, \quad \forall n \geq \nu_\varepsilon, \quad \forall p \geq 0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| \leq \varepsilon.$$

Пример 4.28. Используя критерий Коши, доказать сходимость последовательности (a_n) , где $a_n = \frac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n}{n(n+1)}$.

Решение. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \frac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n}{n(n+1)} + \frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)(n+p+1)} - \frac{\cos 1}{1 \cdot 2} - \frac{\cos 2}{2 \cdot 3} - \dots - \frac{\cos n}{n(n+1)} \right| = \\ &= \left| \frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leq \\ &\leq [|a+b| \leq |a|+|b|] \leq \frac{|\cos(n+1)|}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{|\cos(n+p)|}{(n+p)(n+p+1)} \leq \\ &\leq [|\cos \alpha| \leq 1 \quad \forall \alpha] \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] = \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \leq [\forall p \geq 0] \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0, \exists v_\varepsilon = 1/\varepsilon, \forall n \geq v_\varepsilon, \forall p \geq 0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| \leq \varepsilon$. А это означает, что для последовательности (a_n) выполняется условие Коши, т.е. последовательность является фундаментальной. Согласно достаточному условию критерия Коши последовательность (a_n) сходится.

Пример 4.29. С помощью критерия Коши доказать расходимость последовательности (a_n) , где $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

Решение. Покажем, что для последовательности (a_n) выполняется отрицание условия Коши. Так как условие Коши имеет вид $\forall \varepsilon > 0, \exists v_\varepsilon, \forall n \geq v_\varepsilon, \forall p \geq 0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| \leq \varepsilon$, то отрицание этого условия запишется следующим образом: $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall v_\varepsilon, \exists n \geq v_\varepsilon, \exists p \geq 0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| > \varepsilon_0$. Выполнение такого условия означает, что последовательность расходится. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= \left| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} = \\
&= \left[\text{положим } p = n \right] = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > \left[\text{заменяя} \right. \\
&\quad \left. \text{каждое из слагаемых на } \frac{1}{2n}, \text{ получим строгое неравенство} \right] > \\
&> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\exists \varepsilon_0 = 1/2$ такое, что $\forall \varepsilon, \exists n, \exists p = n \Rightarrow \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| > 1/2 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| > \varepsilon_0$. Это означает, что последовательность (a_n) расходится.

Упражнение 4.5. Используя критерий Коши, доказать сходимость последовательностей.

1. $a_n = \frac{n}{2n-1}$.
2. $a_n = \frac{4n+1}{n}$.
3. $a_n = \frac{n+2}{2n+3}$.
4. $a_n = \frac{7+3n}{5+n}$.
5. $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{arctg} k}{k^2+1}$.
6. $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos kx}{k(2k+1)}$.
7. $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+2)}$.
8. $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx + \cos 2kx}{2^{k-1}}$.
9. $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.
10. $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{arctg}(2^k + k)}{2^k}$.

При нахождении пределов может быть использована и следующая теорема.

Теорема. Любая монотонная ограниченная последовательность сходится. Если последовательность монотонна и неограниченна, то она является бесконечно большой последовательностью определенного знака.

Отметим, что если монотонная последовательность является возрастающей (строго возрастающей), то она ограничена снизу первым членом последовательности. Если монотонная последовательность является убывающей (строго убывающей), то она ограничена сверху первым членом последовательности. Следовательно, для доказательства ограниченности монотонной последовательности достаточно доказать ограниченность сверху возрастающей последовательности и ограниченность снизу убывающей последовательности.

Пример 4.30. Доказать существование предела последовательности (a_n) и найти его, если $a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ знаков корней}}$.

Решение. Покажем, что последовательность (a_n) ограничена. Заметим, что $a_n > 0 \quad \forall n$, и докажем ограниченность сверху:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} < \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}} = \\ &= \left[\text{последовательно извлечем корни} \right] = 2. \end{aligned}$$

Таким образом, $0 < a_n < 2 \quad \forall n$.

Докажем монотонность последовательности (a_n) :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2 + a_n} > \left[\text{учитывая, что } 0 < a_n < 2 \right] > \sqrt{a_n + a_n} = \\ &= \sqrt{2a_n} > \sqrt{a_n^2} = a_n. \end{aligned}$$

Следовательно, $a_{n+1} > a_n$. Итак, последовательность (a_n) возрастает и ограничена, поэтому она имеет конечный предел. Обозначим его через a , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. А тогда и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$. Поскольку $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$, то, переходя в этом равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$a^2 = 2 + a \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет корни $a_1 = -1$, $a_2 = 2$. Так как $a_n > 0$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$, следовательно, $a = 2$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

Упражнение 4.6. Доказать существование предела последовательностей.

1. $a_n = b_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \dots + \frac{b_n}{10^n}$, $b_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $k \in \mathbb{N}$.
2. $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.
3. $a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \dots \frac{n+9}{2n-1}$.

$$4. a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

Указание: $\ln(1+x) \leq x, x > 0$.

$$5. a_n = \frac{n!}{(2n+1)!}.$$

$$6. a_n = \frac{n^3}{10^n}.$$

$$7. a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n}, \quad a_1 = 13.$$

Задачи для индивидуальных и контрольных заданий

4.1. Доказать равенства, исходя из определения предела.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{3n^2 + n + \sin(1/n)} = \frac{1}{3}. \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n + \sqrt{n} + 1)}{2 + \sqrt{n} + \sqrt[4]{n}} = 0.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n \sin^2(1/n^2)}{4 - n^2} = -1. \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^n}{3^{n+1} - 2^n} = \frac{1}{3}.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \cos(1/n) + (-1)^n}{n + 5} = 3. \quad 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 9}{\sin(1/n) + 3n^2} = \frac{1}{3}.$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{4^n + 3^n} = 0. \quad 8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3}{\sqrt{n^3 + n}} = 0.$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n + \cos n}{\sqrt{n} + n} = 0. \quad 10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n(2n - 1)}{10^n + 2n} = 0.$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2n + 3n^2)}{n + \sqrt{n}} = 0. \quad 12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(5/n)}{\sqrt[3]{n^3 + 9}} = 0.$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 3^n}{n + 3^n} = +\infty. \quad 14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{\sqrt{n} + 3} = +\infty.$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n + 1}{3n^2 + n + 3} = +\infty. \quad 16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{2n - 5} = \infty.$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 4n}{2n + 5} = -2. \quad 18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sin n}{n^3 + n + 1} = 0.$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sin\left(\sqrt{n} \frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad 20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2}{2n^2 + n + 1} = 0.$$

21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n - 1}{4n^2 + 3n + 2} = \frac{1}{4}$. 22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + \sin^2 n^2} = 0$.
23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 2n}{4 + 3n} = -\frac{2}{3}$. 24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2^n}{3^n} = 0$.
25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n - 18}{n^2 + n + 1} = 2$. 26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n\pi/12)}{2 + \lg n} = 0$.
27. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 2}{3n + 2} = 1$. 28. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} = 0$.
29. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 18}{3n} = \frac{1}{3}$. 30. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2(-1)^n}{n + \sqrt{n}} = 0$.
31. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n + \operatorname{arctg} n} = 2$. 32. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 4}{7n + 8} = \frac{3}{7}$.
33. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + \sqrt{n^2 + 2}} = 0$. 34. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{(n + 1)2^n} = 0$.
35. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 32n}{16n + 15} = -2$. 36. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n^2 + n)}{1 + \sqrt{n}} = 0$.
37. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2 + 2} = \infty$. 38. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 3n + 1} = 0$.
39. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n + \sin^2(2/n)} = 3$. 40. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 23}{5 - 6n} = -\frac{1}{2}$.
41. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{2\sqrt{n} + 3n} = \frac{2}{3}$. 42. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 4n + 3}{7n + 5} = \infty$.

4.2. Доказать расходимость последовательностей.

1. $a_n = 4 - 3 \sin \frac{n\pi}{4}$. 2. $a_n = 2(-1)^n + 7$.
3. $a_n = \frac{(-1)^n n^2 + 1}{n^2 + 1}$. 4. $a_n = \cos \frac{2\pi n}{3}$.
5. $a_n = (-1)^{n+1} \left(2 + \frac{3}{n} \right)$. 6. $a_n = 1 + \sin \frac{n\pi}{8}$.
7. $a_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \sin \frac{(n+1)\pi}{2}$. 8. $a_n = \frac{2 + (-1)^n n}{3 + 2n}$.
9. $a_n = \frac{2 + 3(-1)^n}{5} + \frac{2n}{n+1}$. 10. $a_n = \sin \frac{n\pi}{2} + \cos n\pi$.

4.3. Найти предел последовательностей.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{16} - 1}{\sqrt[3]{4} - 1}. \quad (\text{Ответ: } 2).$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{9} + 2\sqrt[3]{3} - 3}{\sqrt[3]{3} - 1}. \quad (\text{Ответ: } 4).$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3} - 1}{\sqrt[3]{2n} - 1}. \quad (\text{Ответ: } 3).$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5} - 1}{2\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} - 3}. \quad (\text{Ответ: } 1/5).$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n} - 2}{\sqrt[3]{n^2} - 3\sqrt[3]{n} + 2}. \quad (\text{Ответ: } -3).$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{e} - 1}{3\sqrt[3]{e^2} - 2\sqrt[3]{e} - 1}. \quad (\text{Ответ: } 1/4).$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \sqrt[3]{4}} - \frac{2\sqrt[3]{4}}{1 - \sqrt[3]{16}} \right). \quad (\text{Ответ: } 1/2).$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} + 1}{(\sqrt[3]{9} - 1)(\sqrt[3]{4} - 1)}. \quad (\text{Ответ: } 1/4).$

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt[3]{27}}{1 - \sqrt[3]{81}}. \quad (\text{Ответ: } 3/4).$

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - 3\sqrt[3]{n} + 2}{\sqrt[3]{n^2} + 2\sqrt[3]{n} - 3}. \quad (\text{Ответ: } -1/4).$

4.4. Найти предел последовательностей.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3^n + \lg^4 n}{n + 3^{n+1} + n!}. \quad (\text{Ответ: } 0).$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_5 n + n + 3}{\sqrt[3]{n} + \sqrt{n^5} + 2}. \quad (\text{Ответ: } 0).$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^{10} + 2^n}{2^{n+1} + \ln n^2 + 2}. \quad (\text{Ответ: } 1/2).$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^{12} + (2n + 3)n!}{(n + 1)! + 2^n + \log_3 n}$. (ОТВЕТ: 2).
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + n^5 + 3^n}{3^n + \log_7 n + 5^{n+2}}$. (ОТВЕТ: 1/25).
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2^n + \log_2 n^3}{n^3 + 3^n + \log_3 n^2}$. (ОТВЕТ: 0).
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \ln n^3 + n^2 - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2} + (2n + 1)n + \log_3 n^2}$. (ОТВЕТ: 1/2).
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)! + n^5 + 2^n}{10^n + 5^n + n \cdot n!}$. (ОТВЕТ: 1).
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2^n} + (n + 2)!}{n(5^n + 2(n + 1)!)}$. (ОТВЕТ: 1/2).
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{2n} + n^5 + \log_5 n}{2^{4n} + n^8 + 3 \log_5 n}$. (ОТВЕТ: 1).
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \log_8(2n + 1)}{2^n + n^5}$. (ОТВЕТ: 0).
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n+1} + n^6 + \ln n^2}{9^n + n^9 + \log_9 n}$. (ОТВЕТ: 3).
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 2)^3 - (n + 1)(n^2 - 2)}{(n + 1)^4 - n(n - 2)^3 - 10n^3}$. (ОТВЕТ: -5/6).
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + 1)^3 - 2n(2n - 1)^2}{(n - 2)^3 - n(n + 3)^2}$. (ОТВЕТ: -5/3).
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{3n + 1} - \frac{2n^2 + 3}{6n - 1} \right)$. (ОТВЕТ: -1/6).
16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3n - 2 - \frac{9(n + 1)(n + 3)}{3n - 8} \right)$. (ОТВЕТ: -22).
17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 2)^3 - (n - 2)^3}{(n^2 + 1)^2 - (n^2 - 1)^2}$. (ОТВЕТ: 3).
18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3 - 1}{3n^2 + 1} - \frac{6n^3 + 3n^2}{9n^2 + 3n + 1} \right)$. (ОТВЕТ: -1/9).

19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^5 - n^5 - 10n^4}{(5n+1)^2(3-2n)}.$ (Ответ: $-4/5$).
20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 8}{2n^2 + 5} - \frac{n^2 + 4}{2n + 7} \right).$ (Ответ: $7/4$).
21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^4 + 3n^2 + 5}{n^3 + 9} - 2n + 3 \right).$ (Ответ: 3).
22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-n)^4 - n^4 + 8n^3}{(n-1)^3 - (n+1)^3}.$ (Ответ: -4).

4.5. Найти предел последовательностей.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^n.$ (Ответ: e^{-1}).
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{2n+2}.$ (Ответ: e^{-2}).
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n+1}{2n^2+1} \right)^{n-3}.$ (Ответ: e).
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^2}{2^n} \right)^{\frac{2^n+3n^2}{n^2}}.$ (Ответ: e).
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2n}{5-2n} \right)^{12n+5}.$ (Ответ: e^{24}).
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 - 2n - 3}{5n^2 + 3n + 2} \right)^{\frac{2n^2+3}{3n+2}}.$ (Ответ: $e^{-2/3}$).
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3} \right)^{4n^2+3n+1}.$ (Ответ: e^{-4}).
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10-3n}{100-3n} \right)^{\frac{n^2+3n+5}{10n+1}}.$ (Ответ: e^3).
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2^{n+1}}{5-2^{n+1}} \right)^{7 \cdot 2^n + 5}.$ (Ответ: e^{14}).
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n\sqrt[3]{n} + 4}{n\sqrt[3]{n} + 5} \right)^{\frac{n^2}{2\sqrt[3]{n^2+3}}}.$ (Ответ: $1/\sqrt{e}$).

4.6. Найти предел последовательностей.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdots \sqrt[2^n]{3}). \quad (\text{Ответ: } 3).$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 5}{1 + 2 + \dots + n}. \quad (\text{Ответ: } 6).$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \right). \quad (\text{Ответ: } \sqrt{2}/2).$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right). \quad (\text{Ответ: } 1/2).$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^2} - \frac{n}{3} \right). \quad (\text{Ответ: } 1/2).$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)}{n^3}. \quad (\text{Ответ: } 1/3).$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right). \quad (\text{Ответ: } 1/2).$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - 7n - 4}{4 + 7 + 10 + \dots + (3n+1)}. \quad (\text{Ответ: } 4).$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 + 1 + 4 + \dots + (3n-5)}{(n+5)^3 - (n+3)^3}. \quad (\text{Ответ: } 1/4).$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 8n + 3} \right). \quad (\text{Ответ: } -1/2).$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n + 2} + \sqrt{n^2 + n + 1}}{1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 2n}. \quad (\text{Ответ: } -2).$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{2n+1} + \frac{(n+1)^2}{3-2n} \right). \quad (\text{Ответ: } -2).$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 6 + 11 + \dots + (5n-4)}{\sqrt{100n^4 - 10n^2 + 1}}. \quad (\text{Ответ: } 1/4).$$

4.7. При каких значениях параметра существует предел? Найти его для этих значений параметра.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2^2 x^2} + \dots + \frac{1}{2^n x^n} \right). \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{2x-1}, \quad |x| > \frac{1}{2}).$$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x}{1+x^2} + \dots + \frac{2^n x^n}{(1+x^2)^n} \right).$
(Ответ: $\frac{1+x^2}{1-2x+x^2}, x \neq \pm 1$).
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2x+1} + \frac{x^2}{(2x+1)^2} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(2x+1)^{n+1}} \right).$
(Ответ: $\frac{x}{1+x}, x \in (-\infty; -1) \cup (-1/3; +\infty)$).
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos x + \frac{\cos^2 x}{2} + \dots + \frac{\cos^n x}{2^{n-1}} \right).$
(Ответ: $\frac{2 \cos x}{2 - \cos x}, x \in \mathbb{R}$).
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{3} + \frac{(2x+1)^2}{3^2} + \dots + \frac{(2x+1)^{2n}}{3^{2n}} \right).$
(Ответ: $\frac{2x+1}{2(1-x)}, -2 < x < 1$).
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + (2x+3) + (2x+3)^2 + \dots + (2x+3)^n).$
(Ответ: $-\frac{1}{2(x+1)}, -2 < x < -1$).
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin x + \sin^2 x + \dots + \sin^n x).$
(Ответ: $\frac{\sin x}{1 - \sin x}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$).
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left((1+x^2) + x + \frac{x^2}{1+x^2} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(1+x^2)^n} \right).$
(Ответ: $\frac{(1+x^2)^2}{x^2 - x + 1}, x \in \mathbb{R}$).
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x^2 + \frac{x^3}{1-x} + \dots + \frac{x^n}{1-x} \right).$
(Ответ: $\frac{x^4 - x^3 + x^2}{(1-x)^2}, |x| < 1$).
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \dots + \frac{1}{(1-x)^n} \right).$
(Ответ: $-\frac{1}{x}, x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$).

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2^2}{(x+1)^2} + \dots + \frac{2^{n-1}}{(x+1)^{n-1}} \right).$$

(Ответ: $\frac{2}{x-1}$, $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$).

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+7}{x} + \frac{(2x+7)^2}{x^2} + \dots + \frac{(2x+7)^n}{x^n} \right).$$

(Ответ: $-\frac{2x+7}{x+7}$, $x \in (-7; -7/3)$).

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + (x^2 + x - 1) + (x^2 + x - 1)^2 + \dots + (x^2 + x - 1)^n).$$

(Ответ: $\frac{1}{2-x-x^2}$, $x \in (-2; -1) \cup (0; 1)$).

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3^x + 3^{2x} + \dots + 3^{nx}).$$

(Ответ: $\frac{1}{1-3^x}$, $x \in (-\infty; 0)$).

4.8. Найти предел последовательностей.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2n} + \sqrt[n]{5}}. \quad (\text{Ответ: } 1).$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \lg n}{n^2 + \ln^2 n} (\sin n + \cos n). \quad (\text{Ответ: } 0).$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \log_4(n^4 + 4)}{\sqrt[n]{n} + 8}. \quad (\text{Ответ: } 0).$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 4}{4^n + 2} \arcsin \frac{(-1)^{n-1}}{n+3}. \quad (\text{Ответ: } 0).$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt[n]{25} - 3\sqrt[n]{5} - 1}{(\sqrt[n]{5} - 1)(\sqrt[n]{10} + 4)}. \quad (\text{Ответ: } 1).$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 21n^4}{\log_3 n + 3^{n-1}}. \quad (\text{Ответ: } 3).$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + 3^n}{5^n + \lg \sqrt[n]{n} + 1} \operatorname{arctg}(4 + (-1)^n n^2). \quad (\text{Ответ: } 0).$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + \lg n}{n! + 2^n} \cos^2(n+3). \quad (\text{Ответ: } 0).$$

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sqrt[3]{1,5n} + \sqrt[4]{2,5n^2}}{\sqrt[3]{2n} + \sqrt[3]{3n}}.$ (ОТВЕТ: $3/2$).
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \sqrt[3]{4} - 5 \sqrt[3]{2} + 2}{(1 - \sqrt[3]{2})(1 + \sqrt[3]{4})}.$ (ОТВЕТ: $-1/2$).
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 - n^3 + 4 \log_5 n}{\sqrt[3]{n} + 2^n + 16n^2}.$ (ОТВЕТ: 0).
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + n^5}{(n+1)! + 2^{n+1}} \sin(4 + n!).$ (ОТВЕТ: 0).
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - 5 \sqrt[3]{n} + 4}{\sqrt[3]{n^2} - 1}.$ (ОТВЕТ: $-3/2$).
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + n^3 + 2^{n+1}}{2n + 2^n + \log_5 n}.$ (ОТВЕТ: 2).
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{2n+1} + \sqrt[4]{42n}).$ (ОТВЕТ: 2).
16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{4} - 1)}{(\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{9} - 1)}.$ (ОТВЕТ: 1).
17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n! + n^3}{n! + 3^n}.$ (ОТВЕТ: 3).
18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 4 \ln n}{\sqrt{n} + 2^n} \sin^{25}(\pi \sqrt[3]{n}).$ (ОТВЕТ: 0).
- 4.9. Найти предел последовательностей.**
1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n^2 + 2n^5}{(n^3 + 3)(n-1)(n+4)}.$ (ОТВЕТ: 2).
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)(7-n-n^2)}{(n+4)(n-2)(3-3n-n^2)}.$ (ОТВЕТ: 0).
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n^3+3n+1)}{(n^2+2n+3)(2-3n+2n^2)}.$ (ОТВЕТ: $1/2$).
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 2n + 3}{(1-3n^2)(4n^2+4n+1)}.$ (ОТВЕТ: $-1/12$).

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 2} + \sqrt{n}}{(n + 3)(\sqrt{n} + 1)}.$ (ОТВЕТ: 1).
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n + 2} - \sqrt{n + 5})(n + 7)}{\sqrt{n + 4}}.$ (ОТВЕТ: $-3/2$).
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 2n^2 + n - 16}{(n + 5)(1 - 3n - 3n^2)}.$ (ОТВЕТ: -1).
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 33n} - n)(n + 33)}{33n + 32}.$ (ОТВЕТ: $1/2$).
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5 - 2n)^2(n + 1)^3}{(3 - 4n - 8n^2)(n^3 + 1)}.$ (ОТВЕТ: $-1/2$).
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + 1)^4(2n - 3)^4}{(n + 3)(n + 5)^2(n + 6)^3(4n - 1)^2}.$ (ОТВЕТ: 16).
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 1} - n - 1)n}{2n + 1}.$ (ОТВЕТ: $-1/2$).
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{5n + 1} - \frac{3n^2 + 1}{15n + 1} \right).$ (ОТВЕТ: $-2/75$).
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 + 3n + 1} - 3n - 2).$ (ОТВЕТ: $-3/2$).
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5 + 3n + n^2} - \sqrt{8 + 5n + 4n^2}}{\sqrt{9n^2 + 4n + 1}}.$ (ОТВЕТ: $-1/3$).
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 5n} - 2n}{\sqrt{9n^2 + 7n - 3n}}.$ (ОТВЕТ: $15/14$).
16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^5 + 1)(n^2 + 2)(3n^2 - 1)}{(n^4 + 2n^3 + 13)(4n^3 + 3n + 1)(n^2 - n + 1)}.$ (ОТВЕТ: $3/4$).

ГЛАВА 5. ФУНКЦИЯ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

5.1. ОТОБРАЖЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Пусть заданы два произвольных множества X и Y .

Отображением X в Y называется соответствие (правило, закон), которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет некоторый единственный элемент $y \in Y$.

Обычно заданное отображение обозначают одной буквой (например, f) и пишут

$$f: X \rightarrow Y, \quad X \xrightarrow{f} Y, \quad f: x \mapsto y, \quad x \xmapsto{f} y.$$

Элемент $y \in Y$ называется *образом* элемента $x \in X$ и обозначается $f(x)$, т.е. $y = f(x)$, а элемент x называется *прообразом* элемента y . В связи с этим для обозначения отображения употребляется символика $y = f(x)$ или $x \mapsto f(x)$.

Множество X , на котором задано отображение f , называется *множеством задания* или *областью определения* f , и для него употребляют символ $D(f)$.

Множество всех образов отображения $f: X \rightarrow Y$ (оно может не совпадать с Y , но быть его подмножеством) называется *множеством значений* отображения f и обозначается $E(f)$ или $f(X)$, т.е. $f(X) = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$.

Таким образом, задание отображения предполагает указание тройки (X, f, Y) , где X — отображаемое множество, Y — множество, в которое идет отображение, и f — закон, по которому каждому $x \in X$ сопоставляется $y \in Y$.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *инъективным отображением* или *инъекцией*, если различные элементы множества X имеют и различные образы, т.е. если

$$x_1, x_2 \in X, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *сюръективным отображением* или *сюръекцией* (отображение X на Y), если $f(X) =$

Y или, другими словами, если каждый элемент из Y является образом при отображении f по крайней мере одного элемента из X .

Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *биективным отображением* или *биекцией*, если каждый элемент $y \in Y$ является образом при отображении f некоторого, причем единственного, элемента $x \in X$.

Отображение f биективно тогда и только тогда, когда оно инъективно и сюръективно. Другими словами, биекция — это взаимно однозначное соответствие между множествами.

Если $f : X \rightarrow Y$ — биекция и $y \in Y$, то всегда можно указать единственный элемент $x \in X$ такой, что $f(x) = y$. Тем самым определяется некоторое отображение множества Y во множество X . Это отображение называется *обратным отображением* по отношению к f и обозначается символом $f^{-1} : Y \rightarrow X$. Обратное отображение f^{-1} также будет биекцией.

Отображение f , для которого существует обратное отображение f^{-1} , называется *обратимым*.

Из способа построения обратного отображения вытекают следующие тождества:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X, \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in Y.$$

Пусть заданы два отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$, причем отображение g определено на множестве значений отображения f . Тогда можно построить отображение $h : X \rightarrow Z$ по следующему правилу: $h(x) = g(f(x))$, т. е. для любых $x \in X$ отыскать $y = f(x) \in Y$, а затем по этому элементу y найти соответствующий ему элемент $z = g(y) \in Z$ (рис. 2).

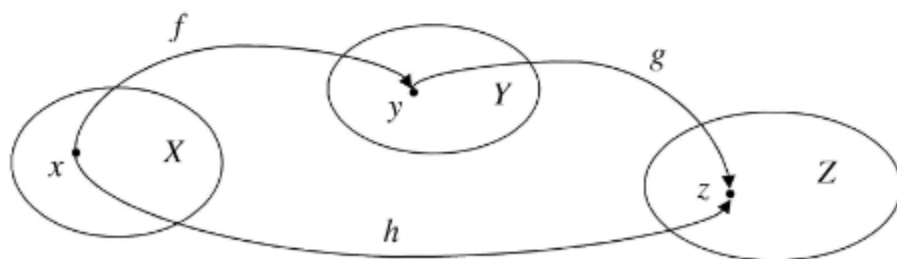


Рис. 2

Построенное таким образом отображение $h : X \rightarrow Z$ называется *композицией* отображений f и g и обозначается символом $g \circ f$, т. е. $h = g \circ f$. Отметим, что важен порядок построения композиции. Вообще говоря, $g \circ f \neq f \circ g$.

Таким образом, $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

5.2. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

В зависимости от природы множеств X и Y термин «отображение» имеет ряд синонимов: функция, преобразование, морфизм, оператор, функционал и т. д. В частности, если множество Y — числовое ($Y \subset \mathbb{R}$), то отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *функцией*. Если же и X — числовое множество, то f называется *числовой функцией* (скалярной функцией, действительной функцией). Далее будем рассматривать только числовые функции и слово «числовые» опускать.

Для функций используется та же терминология, что и для отображений. Например, будем говорить: « f^{-1} — обратная функция по отношению к f », « $g \circ f$ — композиция функций f и g ». Иногда употребляют название «сложная функция», «суперпозиция функций».

Заметим, что, вообще говоря, следует различать функции f (закон, правило, соответствие) и $f(x)$ (элемент множества значений этой функции). Однако по практическим соображениям и в силу традиций это различие часто не принимается во внимание. Далее, наряду с выражением «пусть задана функция f » будут употребляться и такие: «пусть задана функция $f(x)$ » или «функция $y = f(x)$ ».

Если функция задана формулой, то такое задание называется *аналитическим способом задания*.

В некоторых случаях множество задания функции не указано. Тогда считается, что функция определена на множестве всех тех значений x , для каждого из которых выражение $f(x)$ имеет смысл. В этом случае говорят о *естественном множестве задания*.

Упражнение 5.1. Найти множество задания и множество значений следующих функций:

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{|x|}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{x^2}; \quad \text{в) } f(x) = \sqrt{x^2 - 1}; \quad \text{г) } f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

$$\begin{aligned} (\text{Ответ: а) } D(f) &= (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), \quad E(f) = (0; +\infty); \\ \text{б) } D(f) &= (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), \quad E(f) = (0; +\infty); \\ \text{в) } D(f) &= (-\infty; -1] \cup [1; +\infty), \quad E(f) = [0; +\infty); \\ \text{г) } D(f) &= (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), \quad E(f) = \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

Функция f , определенная на симметричном относительно нуля множестве X , называется *четной функцией*, если для любых $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, и *нечетной функцией*, если для любых $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Отметим, что любую функцию $f : (-a; a) \rightarrow \mathbb{R}$ можно представить в виде суммы четной и нечетной функций:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = g(x) + h(x),$$

$$\begin{aligned} \text{где } g(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{четная функция, а } h(x) = \\ &= \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \text{нечетная функция, так как} \end{aligned}$$

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x), \quad h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x).$$

Пример 5.1. Определить, четной или нечетной является функция $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Решение. Множество задания $D(f) = \mathbb{R}$, так как $\forall x \in \mathbb{R}$ выражение $x + \sqrt{1 + x^2} > 0$.

Вычислим $f(-x)$:

$$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1 + x^2}) = \left[-x + \sqrt{1 + x^2} = \right.$$

$$= \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{1+x^2 - x^2}{x + \sqrt{1+x^2}} = (x + \sqrt{1+x^2})^{-1} =$$

$$= \ln(x + \sqrt{1+x^2})^{-1} = -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x).$$

Следовательно, рассматриваемая функция является нечетной.

Упражнение 5.2. Определить, какие из следующих функций являются четными, нечетными, не являются ни четными, ни нечетными:

а) $y = \operatorname{ctg} 3x$; б) $y = -3 \sin x$; в) $y = \frac{x}{\sin x}$; г) $y = x^3 \cos x$;

д) $y = x^2 + \cos x$; е) $y = x^2 + \sin x$; ж) $y = 2x - \cos x$.

(Ответ: а) нечетная; б) нечетная; в) четная; г) нечетная; д) четная; е, ж) ни четная, ни нечетная).

Упражнение 5.3.

а) Функция $f(x)$ является четной, причем $f(3) = 7$, $f(12) = 6$, $f(5) = 6,7$, $f(-6) = 0$. Найти $f(-3)$, $f(-12)$, $f(-5)$, $f(6)$.

б) Функция $g(x)$ является нечетной, причем $g(4) = -3$, $g(2) = -2,7$, $g(-1) = 0,3$, $g(-5) = 5,3$. Найти $g(-4)$, $g(-2)$, $g(1)$, $g(5)$.

(Ответ: а) $f(-3) = 7$, $f(-12) = 6$, $f(-5) = 6,7$, $f(6) = 0$;
б) $g(-4) = 3$, $g(-2) = 2,7$, $g(1) = -0,3$, $g(5) = -5,3$).

Упражнение 5.4. Определить, какие из данных функций $f(x)$ являются четными или нечетными, указав при этом множество задания $D(f)$.

1. $f(x) = 3x - x^3$. (Ответ: $D(f) = \mathbb{R}$, нечетная).

2. $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$. (Ответ: $D(f) = \mathbb{R}$, четная).

3. $f(x) = a^x + a^{-x}$, $a > 0$. (Ответ: $D(f) = \mathbb{R}$, четная).

4. $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$. (Ответ: $D(f) = (-1; 1)$, нечетная).

5. $f(x) = |x|$. (Ответ: $D(f) = \mathbb{R}$, четная).

6. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$. (Ответ: $D(f) = \mathbb{R}$, нечетная).
 7. $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$. (Ответ: $D(f) = \mathbb{R}$, четная).
 8. $f(x) = |10 - x| - |10 + x|$. (Ответ: $D(f) = \mathbb{R}$, нечетная).

Функция f называется *периодической* с периодом $\omega \neq 0$, если вместе с x множеству задания принадлежат также $x + \omega$ и $x - \omega$ и выполняется условие $f(x + \omega) = f(x) \quad \forall x \in D(f)$.

Свойства периода функций, периодических на $\mathbb{R}$

1. Если ω — период и $k \in \mathbb{Z}$, то $k\omega$ тоже период.
2. Если ω_1 и ω_2 — периоды функции f , то $\omega_1 + \omega_2$ тоже период функции f .
3. Если ω — период функции f , то $(-\omega)$ тоже период функции f .

Если число $\omega_0 > 0$ является периодом функции f , а любой другой период ω удовлетворяет условию $\omega = k\omega_0$, где $k \in \mathbb{Z}$, то ω_0 называется *наименьшим* или *главным периодом*.

4. Если ω является общим периодом для функций f и g , то их линейная комбинация также имеет период ω .

5. Если функция f имеет период ω_1 , функция g имеет период ω_2 , то линейная комбинация функций f и g будет периодической, если периоды ω_1 и ω_2 соизмеримы, т. е. если $\omega_1/\omega_2 = r$ и r — рациональное число.

6. Если функция f — периодическая, $f \neq \text{const}$, и существует точка, в которой f непрерывна, то f обладает наименьшим положительным периодом (определение непрерывной функции см. в § 6.1).

Пример 5.2. Проверить, что для функции $f(x) = \cos 2x$ число $\omega = -3\pi$ является периодом.

Решение. Множество $D(f) = \mathbb{R}$. Для любого $x \in \mathbb{R}$ числа $x - 3\pi$, $x + 3\pi \in \mathbb{R}$. Значение функции

$$f(x - 3\pi) = \cos(2(x - 3\pi)) = \cos(2x - 6\pi) = \cos 2x = f(x).$$

Пример 5.3. Найти главный период ω_0 функции $f(x) = 3 \sin 2x$.

Решение. Множество $D(f) = \mathbb{R}$. Для всех $x \in \mathbb{R}$ и $\omega \in \mathbb{R}$ числа $x - \omega, x + \omega \in \mathbb{R}$. Потребуем, чтобы выполнялось условие $f(x + \omega) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x + \omega) = 3 \sin 2(x + \omega) = 3 \sin 2x = f(x).$$

Положим в последнем равенстве $x = 0$: $3 \sin 2\omega = 0 \Rightarrow \sin 2\omega = 0 \Rightarrow 2\omega = 2k\pi \Rightarrow \omega = k\pi \Rightarrow \omega_0 = \pi$.

Проверим теперь, что $\omega_0 = \pi$ является периодом рассматриваемой функции:

$$f(x + \pi) = 3 \sin 2(x + \pi) = 3 \sin 2x = f(x).$$

Следовательно, $\omega_0 = \pi$ является главным периодом.

Пример 5.4. Найти главный период ω_0 функции $f(x) = 3 \sin x + \sin 2x$.

Решение. $D(f) = \mathbb{R}$. Для функции $\sin x$ период $\omega_1 = 2k\pi$, для функции $\sin 2x$ период $\omega_2 = k\pi$. Следовательно, для функции $f(x)$ период $\omega = 2k\pi = k \cdot 2\pi = k\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = 2\pi$.

Замечание. Для функций $\sin ax$ и $\cos ax$ при $a > 0$ период $\omega = \frac{2k\pi}{a}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{a}$, а для функций $\operatorname{tg} ax$ и $\operatorname{ctg} ax$ период $\omega = \frac{k\pi}{a}$, $\omega_0 = \frac{\pi}{a}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5.5. Является ли функция $f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2})$ периодической?

Решение. $D(f) = \mathbb{R}$. Для функции $\sin x$ период $\omega_1 = 2k\pi$, для функции $\sin(x\sqrt{2})$ период $\omega_2 = \frac{2k\pi}{\sqrt{2}}$. Так как $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2k\pi}{2k\pi} \sqrt{2} = \sqrt{2}$, а $\sqrt{2}$ — иррациональное число, то рассматриваемая функция не является периодической.

Упражнение 5.5. Выяснить, какие из данных функций являются периодическими, и определить их наименьший период.

1. $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$. (Ответ: периодическая, $\omega_0 = 2\pi$).
2. $f(x) = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3}$. (Ответ: периодическая, $\omega_0 = 6\pi$).
3. $f(x) = \sin^2 x$. (Ответ: периодическая, $\omega_0 = \pi$).
4. $f(x) = \sin x^2$. (Ответ: непериодическая).
5. $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$. (Ответ: непериодическая).

Функция f называется *ограниченной сверху* на множестве X , если ограничено сверху множество $f(X)$, т.е. если существует число B такое, что для любых $x \in X$ верно неравенство $f(x) \leq B$. Аналогично если для любых $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geq A$, где $A \in \mathbb{R}$, то функцию f называют *ограниченной снизу* (множество $f(X)$ ограничено снизу). Функцию, ограниченную и сверху, и снизу, т.е. удовлетворяющую неравенству $A \leq f(x) \leq B$ для любого $x \in X$, называют *ограниченной на множестве X* . Это определение равносильно следующему утверждению: функция f ограничена на множестве X , если существует $C > 0$ такое, что для любых $x \in X$ верно неравенство $|f(x)| \leq C$.

Свойства ограниченных функций

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и ограничены на множестве X , то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $|f(x)|$ также ограничены на множестве X .

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X и функция $f(x)$ ограничена на множестве X , а функция $g(x)$ такова, что $|g(x)| \geq m > 0 \quad \forall x \in X$, то функция $f(x)/g(x)$ ограничена на множестве X .

Пример 5.6. Показать, что функция $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, ограничена.

Решение. Рассмотрим

$$|f(x)| = \frac{|x|}{x^2 + 1} \leq \left[(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow \frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}, \right. \\ \left. |x| = a, \quad b = 1 \right] \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Пример 5.7. Показать, что функция $f(x) = \frac{x^2+x+6}{x^2+x+1}$ ограничена на $\mathbb{R}$.

Решение. Так как $f(x) = \frac{x^2+x+1+5}{x^2+x+1} = 1 + \frac{5}{x^2+x+1}$ и $g(x) = x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} = m > 0$, то $0 < \frac{5}{x^2+x+1} < \frac{5}{3/4}$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$ справедливо двойное неравенство $1 < \frac{x^2+x+6}{x^2+x+1} < 1 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$. Следовательно, функция $f(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$.

Упражнение 5.6. Показать, что данные функции ограничены на множестве X .

1. $f(x) = 2^{\cos^2 x} + 3 \sin x$, $X = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$, $X = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$, $X = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \arcsin \frac{1}{x^2-3x+4}$, $X = \mathbb{R}$.
5. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $X = [-2; 2]$.
6. $f(x) = x^2+3x+5$, $X = [1; 3]$.
7. $f(x) = \frac{x^2+\sin(x+1)}{1+x^2}$, $X = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = 3^{-|\sin x|}$, $X = \mathbb{R}$.

Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется:

- 1) *строго возрастающей* на множестве X , если для любых $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$;
- 2) *возрастающей* на множестве X , если для любых $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- 3) *строго убывающей* на множестве X , если для любых $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$;
- 4) *убывающей* на множестве X , если для любых $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Возрастающие и убывающие функции объединяют названием *монотонные функции*, строго убывающие и строго возрастающие — названием *строго монотонные функции*.

Свойства монотонных функций

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ монотонны на множестве X . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на множестве X , то функция $-f(x)$ убывает (возрастает) на X .

2. Если функция $f(x) > 0$ и $f(x)$ возрастает (убывает) на X , то $f^2(x)$ возрастает (убывает) на X ; если функция $f(x) < 0$ и $f(x)$ возрастает (убывает) на X , то $f^2(x)$ убывает (возрастает) на X .

3. Если функция $f(x) > 0$ и $f(x)$ возрастает (убывает) на X , то $1/f(x)$ убывает (возрастает) на X ; если функция $f(x) < 0$ и $f(x)$ возрастает (убывает) на X , то $1/f(x)$ убывает (возрастает) на X .

4. Если функция $f(x) \geq 0$ и $f(x)$ возрастает (убывает) на X , то $\sqrt{f(x)}$ возрастает (убывает) на X .

5. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ возрастают (убывают) на X , то функция $f(x) + g(x)$ возрастает (убывает) на X .

6. Если функции $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$ на X и обе возрастают (убывают) на X , то функция $f(x)g(x)$ возрастает (убывает) на X ; если функции $f(x) < 0$ и $g(x) < 0$ на X и обе возрастают (убывают) на X , то функция $f(x)g(x)$ убывает (возрастает) на X .

Пример 5.8. Показать, что функция $f(x) = \sqrt{x+1}$ является возрастающей на множестве задания.

Решение. Так как $x+1 \geq 0$ при $x \geq -1$, то $D(f) = [-1; +\infty)$. Возьмем все $x_1, x_2 \in D(f)$ такие, что $-1 \leq x_1 < x_2 < +\infty$, и подсчитаем разность $f(x_2) - f(x_1)$:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \sqrt{x_2+1} - \sqrt{x_1+1} = \frac{x_2+1 - x_1 - 1}{\sqrt{x_2+1} + \sqrt{x_1+1}} = \\ &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2+1} + \sqrt{x_1+1}} > 0, \end{aligned}$$

так как $\sqrt{x_2+1} > 0$, $\sqrt{x_1+1} \geq 0$, $x_2 - x_1 > 0$. Таким образом, $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f(x)$ возрастает на $[-1; +\infty)$.

5.3. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

Если функция $y = f(x)$ биективна, то, как отмечалось ранее, для каждого $y \in E(f)$ найдется единственное $x \in D(f)$ такое, что $f(x) = y$. Функция, определенная на $E(f)$ и сопоставляющая каждому $y \in E(f)$ значение x такое, что $f(x) = y$, называется *обратной* для функции f и обозначается f^{-1} , т.е. $x = f^{-1}(y)$, $y \in E(f)$.

Из этого определения следует, что

$$D(f^{-1}) = E(f), \quad E(f^{-1}) = D(f).$$

Если обозначить аргумент обратной функции через x , а значение через y , то обратная функция запишется в виде $y = f^{-1}(x)$, $x \in D(f^{-1})$.

Пример 5.9. Задать с помощью формулы функцию, обратную функции $y = x^3$.

Решение. $f(x) = x^3$, $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \mathbb{R}$. Следовательно, $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$. Выразим x через y , исходя из равенства $y = x^3$: $x = \sqrt[3]{y}$. Получим, что функция $g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ обратная к $f(x)$.

Подсчитаем:

$$f(g(x)) = (g(x))^3 = (\sqrt[3]{x})^3 = x,$$

$$g(f(x)) = \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

Упражнение 5.7. Задать с помощью формулы функцию, обратную функции $f(x)$:

а) $f(x) = x+2$; б) $f(x) = \frac{1}{2}x$; в) $f(x) = \sin x$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$;

г) $f(x) = \cos x$, $x \in [0; \pi]$; д) $f(x) = \operatorname{tg} x$; е) $f(x) = \sqrt{x}$;

ж) $f(x) = a^x$, $a > 1$; з) $f(x) = e^x$.

(Ответ: а) $g(x) = x - 2$; б) $f(x) = 2x$; в) $g(x) = \arcsin x$;
г) $g(x) = \arccos x$; д) $g(x) = \operatorname{arctg} x$; е) $g(x) = x^2$, $x \geq 0$;
ж) $g(x) = \log_a x$; з) $g(x) = \ln x$).

5.4. КОМПОЗИЦИЯ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим две функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$ такие, что $E(f) \subset D(g)$. Функция $z = g(f(x))$, $x \in D(f)$, называется *композицией* функций f и g и обозначается символом $g \circ f$. Таким образом, $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Пример 5.10. Построить композиции функций $g \circ f$ и $f \circ g$, если $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$.

Решение.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2^{f(x)} = 2^{x^2},$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (2^x)^2 = 2^{2x} = 4^x.$$

5.5. ГРАФИК ФУНКЦИИ

Графиком Γ_f функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ в прямоугольной декартовой системе координат Oxy называют множество точек

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in X, y = f(x)\}.$$

Из определения обратной функции следует, что

$$\forall x \in E(f) \quad f(f^{-1}(x)) = x,$$

$$\forall x \in D(f) \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$

График обратной функции $y = f^{-1}(x)$, $x \in D(f^{-1})$, симметричен графику функции $y = f(x)$, $x \in D(f)$, относительно прямой $y = x$.

В некоторых случаях график функции можно построить преобразованием известного графика другой функции. Отметим простейшие случаи.

Пусть известен график Γ_f функции $f(x)$. Тогда:

1) график функции $y = f(x) + c$ можно получить параллельным переносом графика Γ_f вдоль оси ординат на c (рис. 3, $c = -1$);

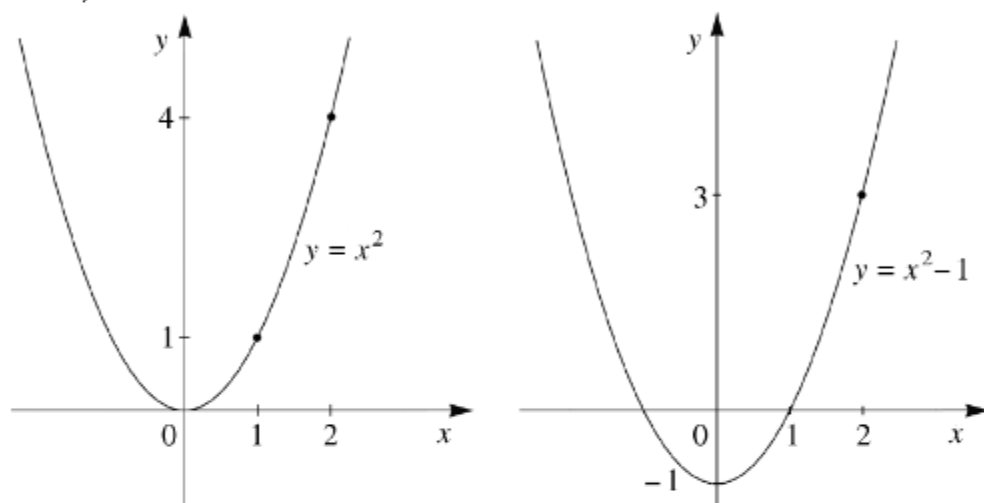


Рис. 3

2) график функции $y = f(x - c)$ может быть получен параллельным переносом графика Γ_f вдоль оси Ox на c (рис. 4, $c = 1$);

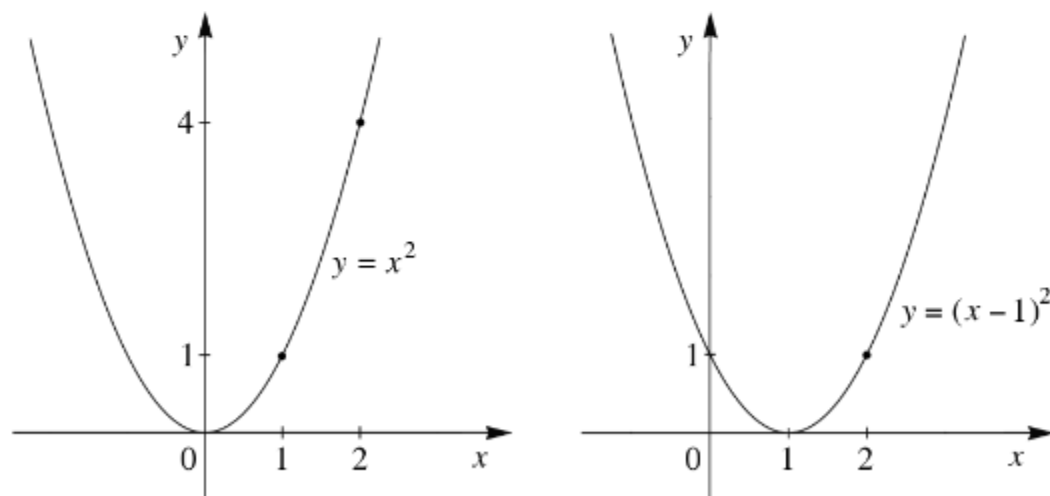


Рис. 4

3) график функции $y = \alpha f(x)$, $\alpha > 0$, может быть получен из графика Γ_f умножением каждой ординаты на α (сжатие при $0 < \alpha < 1$ либо растяжение при $\alpha > 1$ вдоль оси Oy) (рис. 5, $\alpha = 2$);

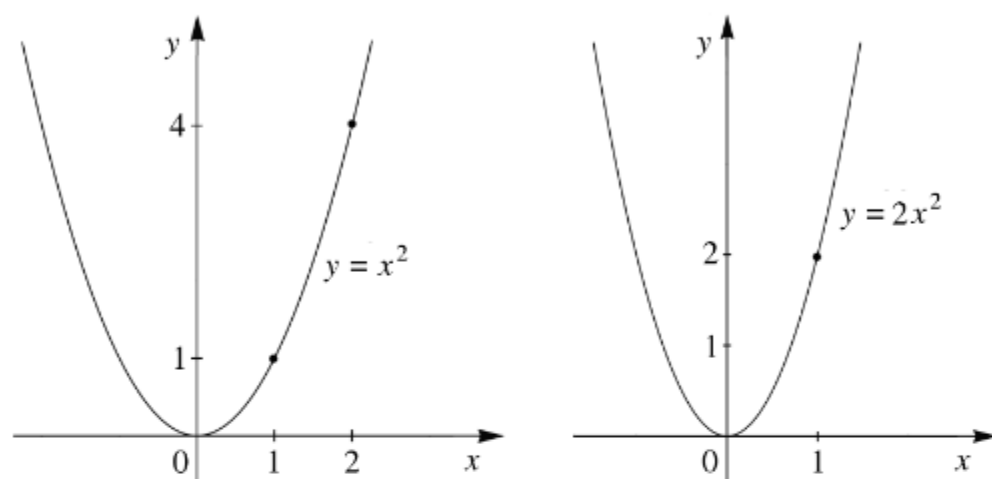


Рис. 5

4) график функции $y = f(\alpha x)$, $\alpha > 0$, может быть получен из графика Γ_f сжатием вдоль оси Ox в α раз при $\alpha > 1$ и растяжением вдоль оси Ox в α раз при $0 < \alpha < 1$ (рис. 6, $\alpha = 2$);

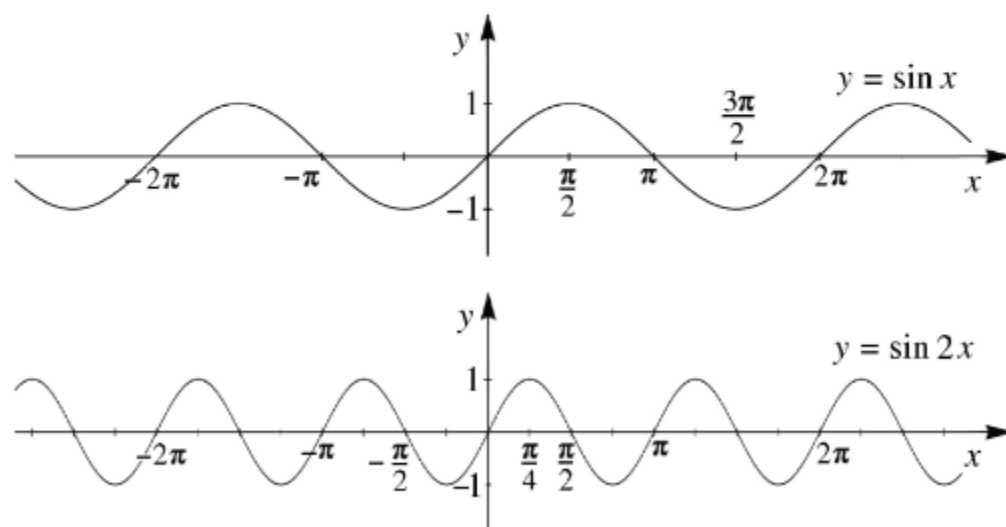


Рис. 6

5) график функции $y = -f(x)$ симметричен графику Γ_f относительно оси Ox (рис. 7);

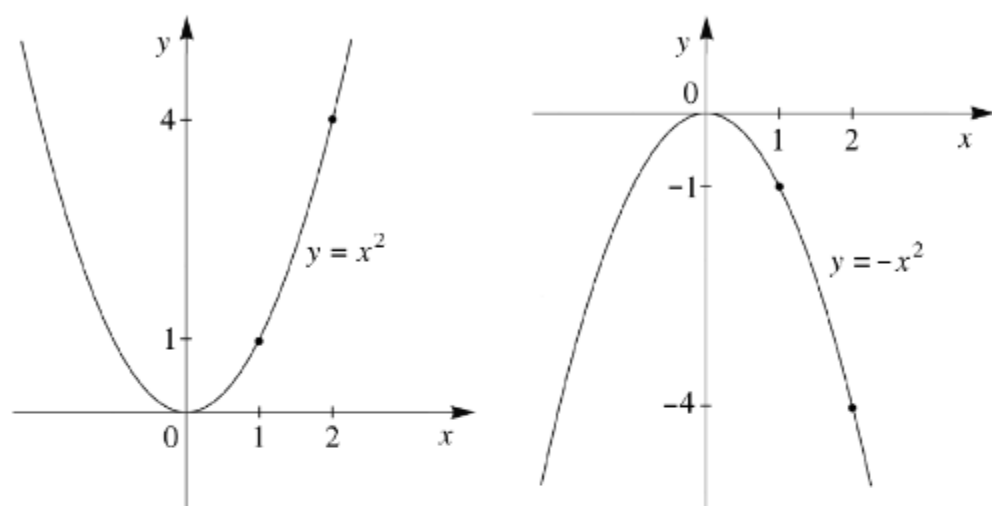


Рис. 7

6) график функции $y = f(-x)$ симметричен графику Γ_f относительно оси Oy (рис. 8);

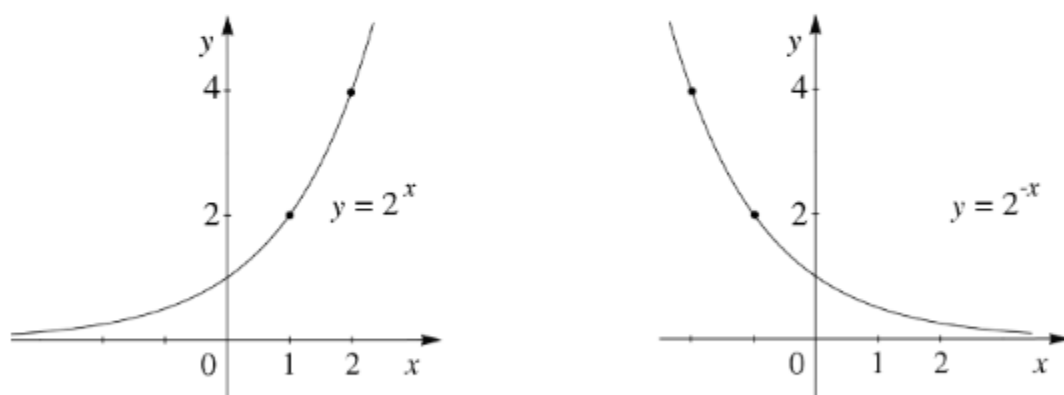


Рис. 8

7) график функции $y = |f(x)|$ получается из графика Γ_f симметричным отражением относительно оси Ox той части графика, которая расположена ниже оси Ox . Остальная часть Γ_f остается неизменной (рис. 9);

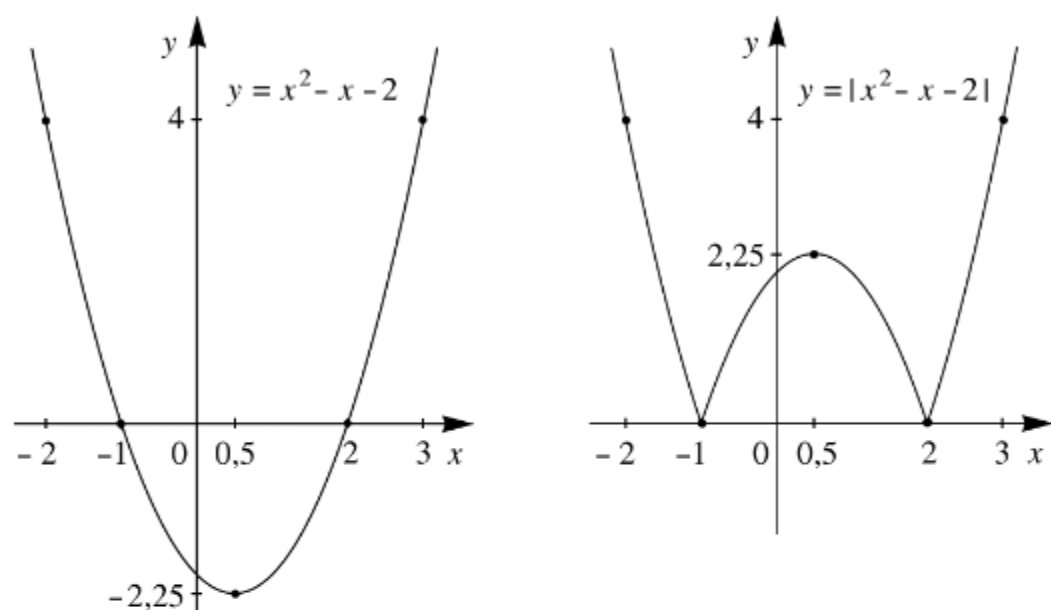


Рис. 9

8) график функции $y = f(|x|)$ получается из графика Γ_f заменой части графика для $x < 0$ симметричным отражением относительно оси Oy части графика для $x \geq 0$ (часть графика для $x \geq 0$ остается без изменений) (рис. 10).

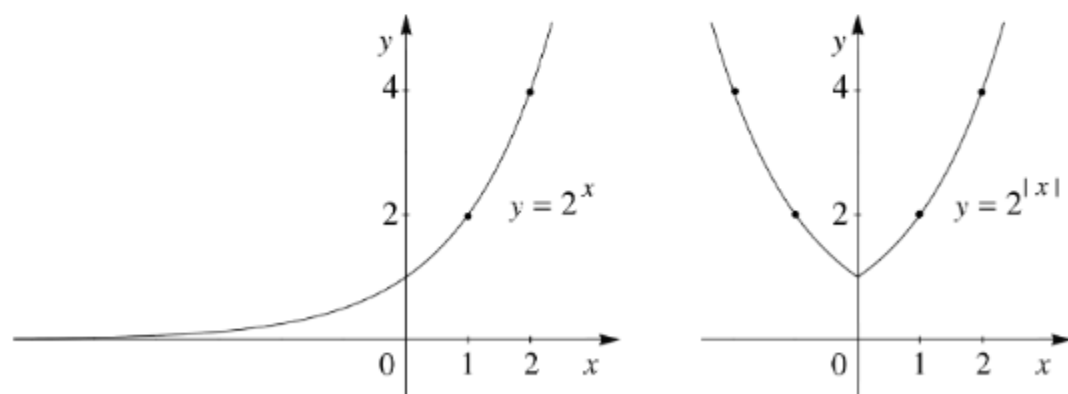


Рис. 10

5.6. ГРАФИКИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

5.6.1. Линейная функция

Рассмотрим функцию вида

$$y = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \mathbb{R}$, если $a \neq 0$, и $E(f) = b$, если $a = 0$. Функция строго возрастает при $a > 0$, строго убывает при $a < 0$. График функции — прямая линия*.

Частным случаем линейной функции является функция $y = a$ (график параллелен оси Ox и проходит через точку $(0; a)$). Заметим, что множество точек, определяемое равенством $x = b$, есть прямая, параллельная оси Oy и проходящая через точку $(b; 0)$.

5.6.2. Квадратичная функция

Квадратичная функция — это функция вида

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

1. В случае $a > 0$ множеством значений квадратичной функции будет $E(f) = \left[\frac{4ac - b^2}{4a}; +\infty \right)$. Функция строго убывает на промежутке $(-\infty; -b/(2a)]$ и строго возрастает на промежутке $[-b/(2a); +\infty)$.

График функции — парабола с осью $x = -b/(2a)$, вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$ и ветвями, направленными вверх.

2. В случае $a < 0$ множество значений $E(f) = \left(-\infty; \frac{4ac - b^2}{4a} \right]$. Функция строго возрастает на промежутке $(-\infty; -b/(2a)]$ и строго убывает на промежутке $[-b/(2a); +\infty)$.

*Такое определение линейной функции сложилось исторически. В современной математике описанную функцию относят к аффинным функциям, а линейным считается отображение, удовлетворяющее условиям аддитивности и однородности, т. е. при $b = 0$.

График функции — парабола с осью $x = -b/(2a)$, вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ и ветвями, направленными вниз.

5.6.3. Степенная функция

Степенная функция — это функция

$$y = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. $\alpha = 2n, n \in \mathbb{N}$: $y = x^{2n}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = [0; +\infty)$. Функция четная, ее график симметричен относительно оси Oy . Функция строго убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, строго возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ (рис. 11).

2. $\alpha = 2n - 1, n \in \mathbb{N}$: $y = x^{2n-1}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \mathbb{R}$. Функция нечетная, ее график симметричен относительно начала координат. Функция строго возрастает (рис. 12).

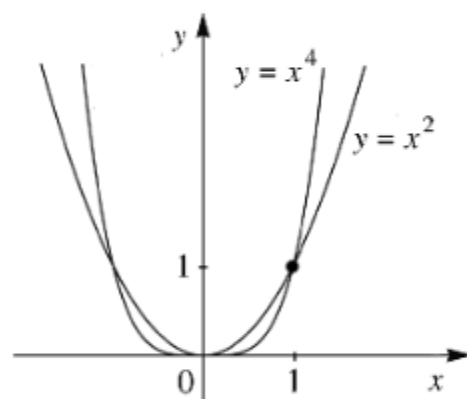


Рис. 11

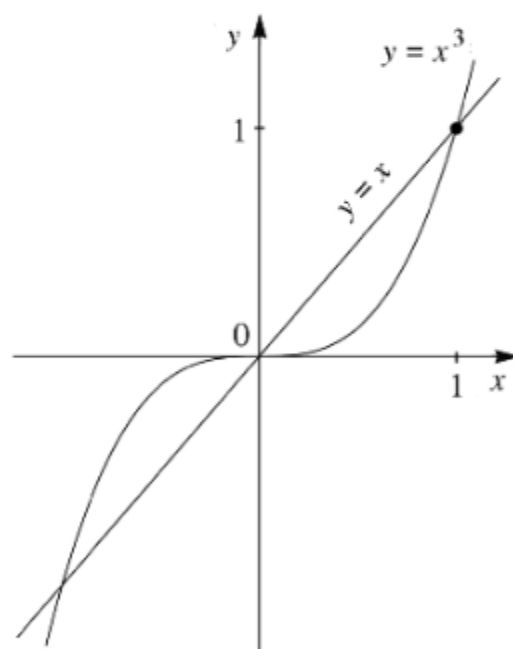


Рис. 12

3. $\alpha = -2n, n \in \mathbb{N}$: $y = 1/x^{2n}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $E(f) = (0; +\infty)$. Функция четная, ее график симметричен относительно оси Oy . Функция строго возраста-

ет на интервале $(-\infty; 0)$, строго убывает на интервале $(0; +\infty)$ (рис. 13).

4. $\alpha = -2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$: $y = 1/x^{2n-1}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Функция нечетная, ее график симметричен относительно начала координат. Функция строго убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ (рис. 14).

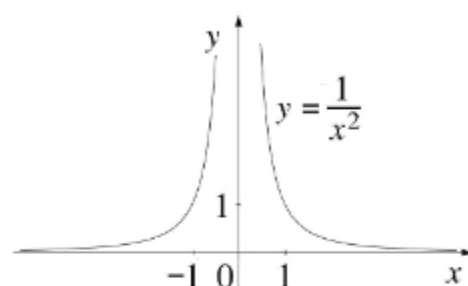


Рис. 13

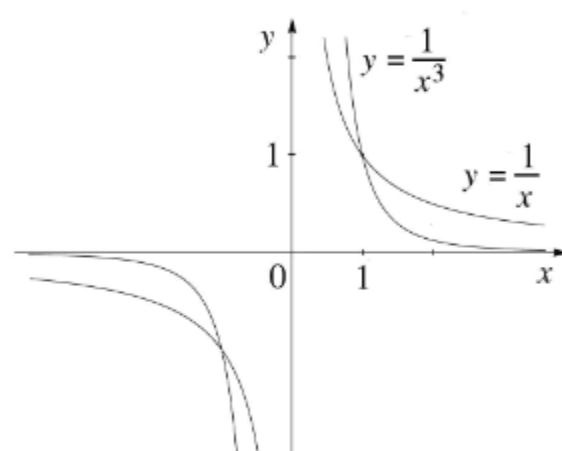


Рис. 14

5.6.4. Показательная функция

1. Показательная функция — это функция вида

$$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

$D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = (0; +\infty)$. При $0 < a < 1$ функция строго убывает на $\mathbb{R}$, при $a > 1$ — строго возрастает на $\mathbb{R}$ (рис. 15).

2. Экспонента $y = e^x = \exp(x)$ является частным случаем показательной функции. $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = (0; +\infty)$. Функция строго возрастает (рис. 16). Отметим, что $a^x = e^{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

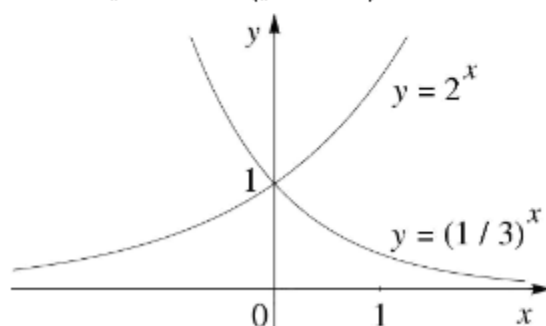


Рис. 15

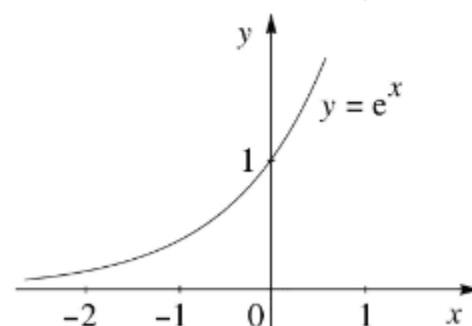


Рис. 16

5.6.5. Логарифмическая функция

1. Логарифм натуральный

$$y = \ln x \quad (y = \log_e x).$$

$D(f) = (0; +\infty)$, $E(f) = \mathbb{R}$. Функция строго возрастает (рис. 17).

2. Логарифм

$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

$D(f) = (0; +\infty)$, $E(f) = \mathbb{R}$. При $0 < a < 1$ функция строго убывает, при $a > 1$ строго возрастает (рис. 18).

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

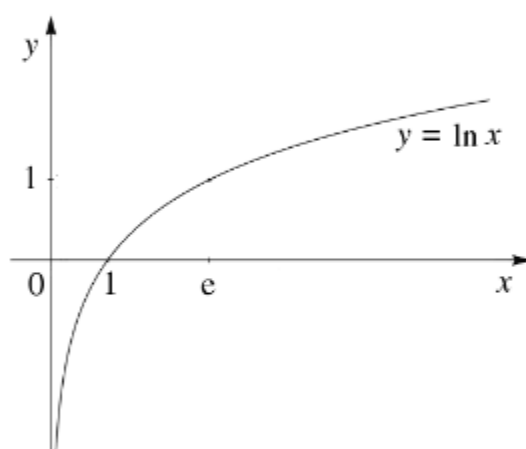


Рис. 17

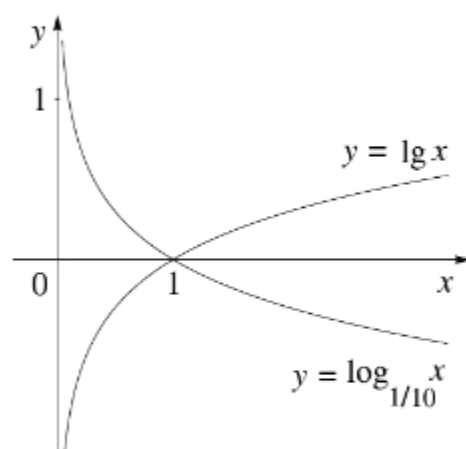


Рис. 18

5.6.6. Тригонометрические функции

1. Функция синус

$$y = \sin x, \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad E(f) = [-1; 1].$$

Функция нечетная, имеет период 2π . На каждом промежутке $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$, функция строго возрастает, на каждом промежутке $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$, функция строго убывает,

$$\sin 0 = 0, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\sin \pi = 0, \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1.$$

График функции $y = \sin x$ называется *синусоидой* (рис. 19).

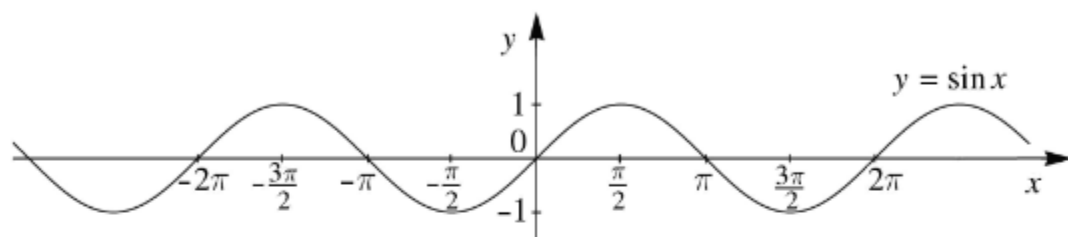


Рис. 19

2. Функция косинус

$$y = \cos x, \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad E(f) = [-1; 1].$$

Функция четная, имеет период 2π . На каждом промежутке $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$, функция строго убывает, на промежутке $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$, строго возрастает. Поскольку $\cos x = \sin(x + \pi/2)$, то график функции $y = \cos x$ получается из графика функции $y = \sin x$ сдвигом вдоль оси Ox на $-\pi/2$ (рис. 20),

$$\cos 0 = 1, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\cos \pi = -1, \quad \cos \frac{3\pi}{2} = 0.$$

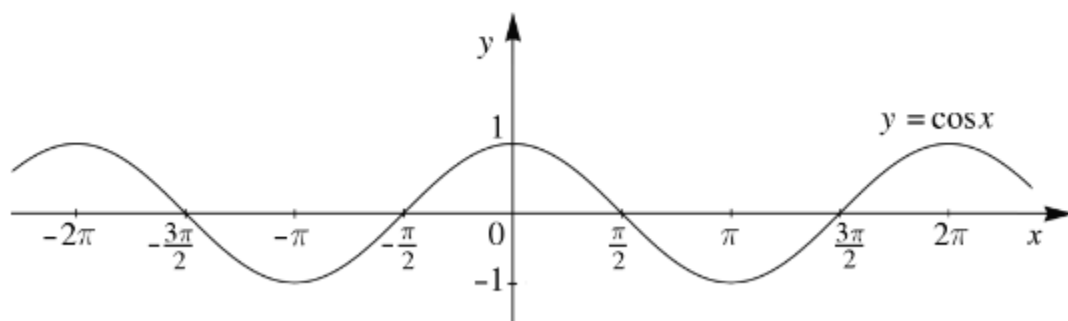


Рис. 20

3. Функция тангенс

$$y = \operatorname{tg} x, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad E(f) = \mathbb{R}.$$

Функция нечетная, имеет период π . На каждом промежутке $(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, функция строго возрастает (рис. 21),

$$\operatorname{tg} 0 = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

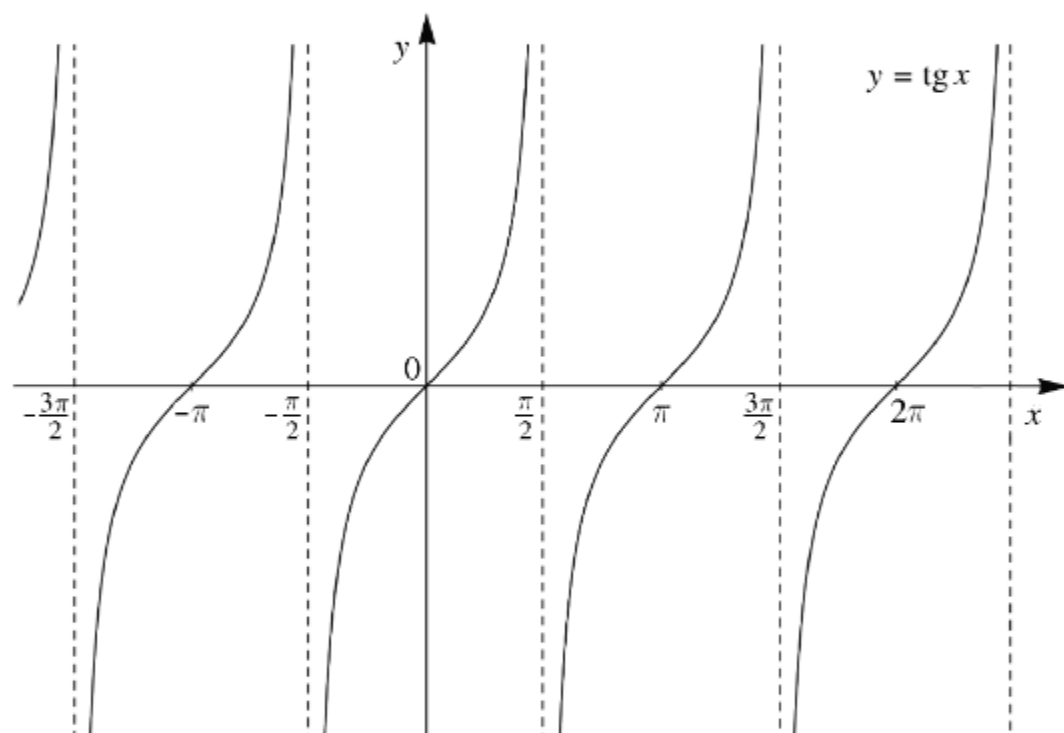


Рис. 21

4. Функция котангенс

$$y = \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad E(f) = \mathbb{R}.$$

Функция нечетная, имеет период π . Строго убывает на каждом промежутке $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right),$$

то график функции котангенс может быть получен из графика функции тангенс симметрией относительно оси Oy и сдвигом на $\pi/2$ (рис. 22),

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0.$$

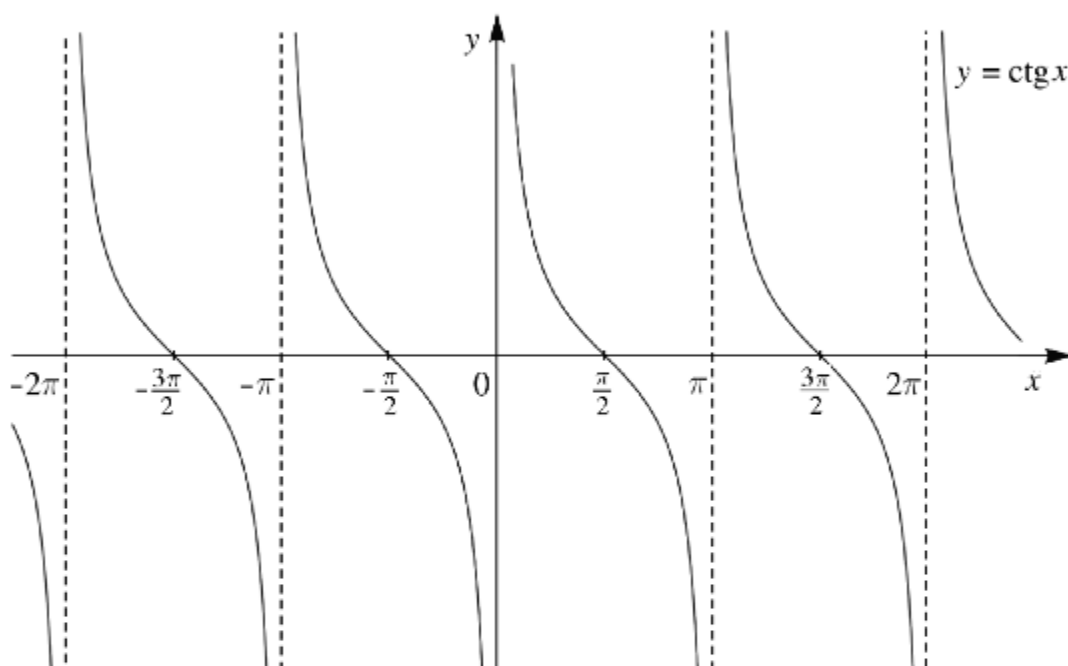


Рис. 22

5.6.7. Обратные тригонометрические функции

1. Функция арксинус

$$y = \arcsin x.$$

Функция является обратной к функции $y = \sin x$ для $x \in [-\pi/2; \pi/2]$. $D(f) = [-1; 1]$, $E(f) = [-\pi/2; \pi/2]$. Функция нечетная, строго возрастает,

$$\arcsin 0 = 0, \quad \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку график $\Gamma_{f^{-1}}$ функции $y = f^{-1}(x)$, обратной к функции $y = f(x)$, симметричен графику Γ_f относительно прямой $y = x$, то график арксинуса можно получить, отобразив график функции $y = \sin x$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 23).

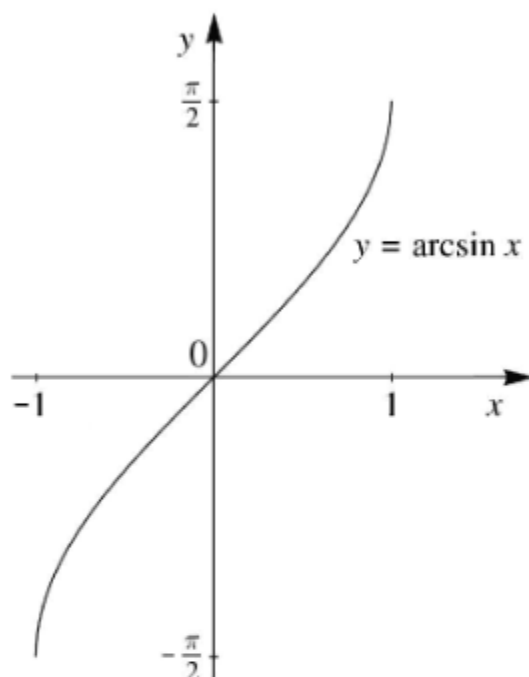


Рис. 23

2. Функция арккосинус

$$y = \arccos x.$$

Функция является обратной к функции $y = \cos x$ для $x \in [0; \pi]$. $D(f) = [-1; 1]$, $E(f) = [0; \pi]$. Функция строго убывает,

$$\arccos(-1) = \pi, \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}, \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4},$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \arccos 1 = 0.$$

Поскольку $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, то график функции $y = \arccos x$ может быть получен из графика функции $y = \arcsin x$ симметрией последнего относительно оси Oy и сдвигом на $\pi/2$ вдоль оси Oy . График функции $y = \arccos x$ можно также получить, отобразив часть графика функции $y = \cos x$ на $x \in [0; \pi]$ симметрично относительно прямой $y = x$ (рис. 24).

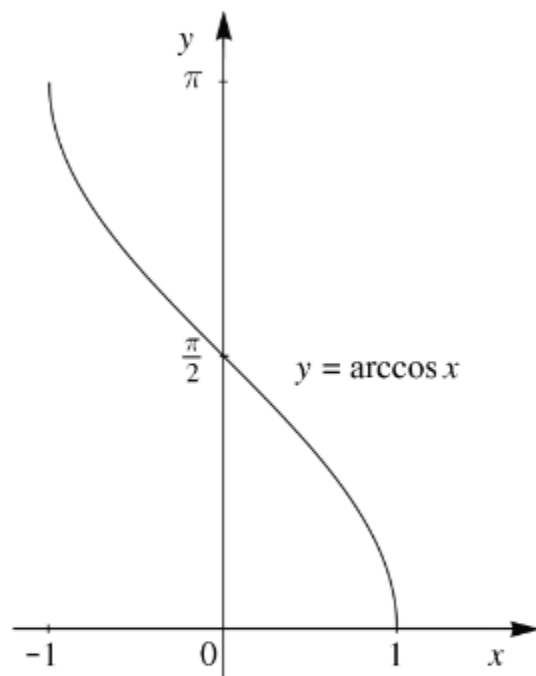


Рис. 24

3. Функция арктангенс

$$y = \operatorname{arctg} x.$$

Функция является обратной к функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2; \pi/2)$, $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = (-\pi/2; \pi/2)$. Функция нечетная, строго возрастает,

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ может быть получен из графика функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2; \pi/2)$, симметрией относительно прямой $y = x$ (рис. 25).

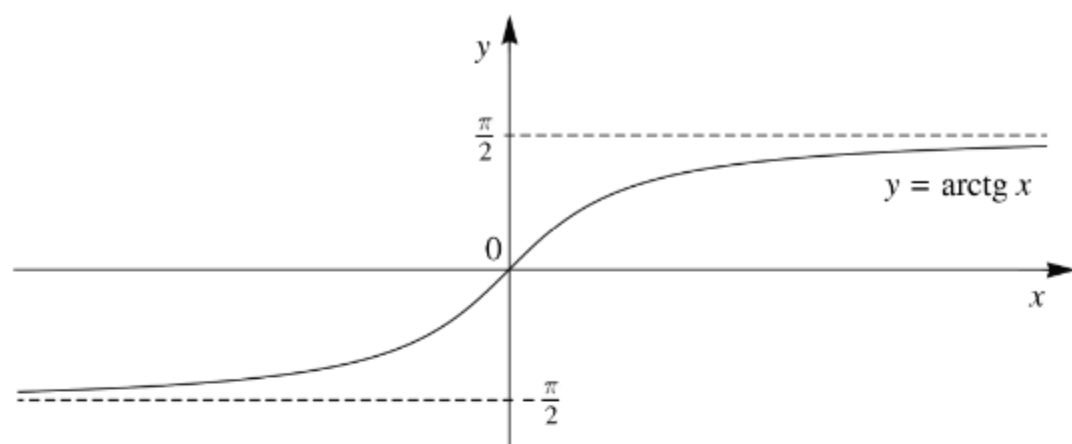


Рис. 25

4. Функция арккотангенс

$$y = \operatorname{arccotg} x.$$

Функция является обратной к функции $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$, $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = (0; \pi)$. Функция строго убывает,

$$\begin{aligned} \operatorname{arccotg}(-\sqrt{3}) &= \frac{5\pi}{6}, & \operatorname{arccotg}(-1) &= \frac{3\pi}{4}, & \operatorname{arccotg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{arccotg} 0 &= \frac{\pi}{2}, & \operatorname{arccotg} \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{\pi}{3}, & \operatorname{arccotg} 1 &= \frac{\pi}{4}, & \operatorname{arccotg} \sqrt{3} &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

График функции $y = \operatorname{arccotg} x$ может быть получен из графика функции $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$, симметрией относительно прямой $y = x$ (рис. 26).

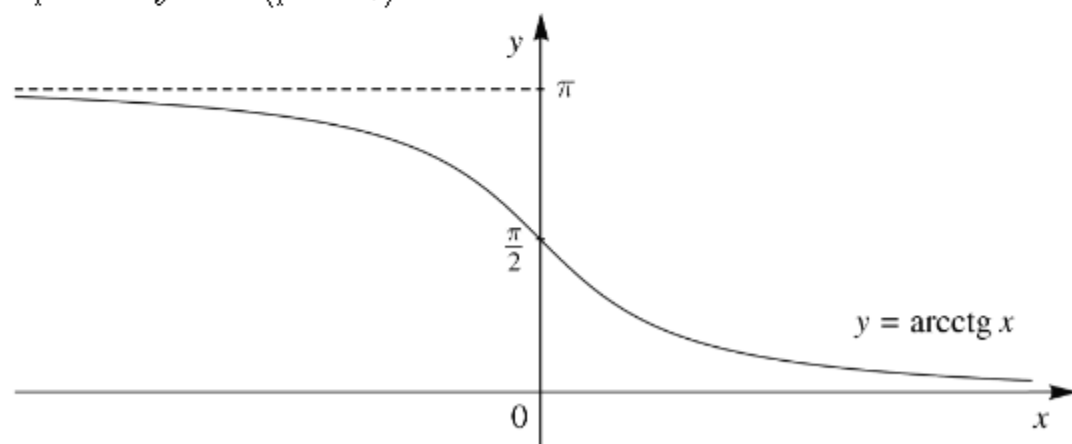


Рис. 26

5.6.8. Гиперболические функции

1. Функция синус гиперболический

$$y = \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad E(f) = \mathbb{R}.$$

Функция нечетная, строго возрастает (рис. 27).

2. Функция косинус гиперболический

$$y = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad E(f) = [1; +\infty).$$

Функция четная, строго убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и строго возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ (рис. 28).

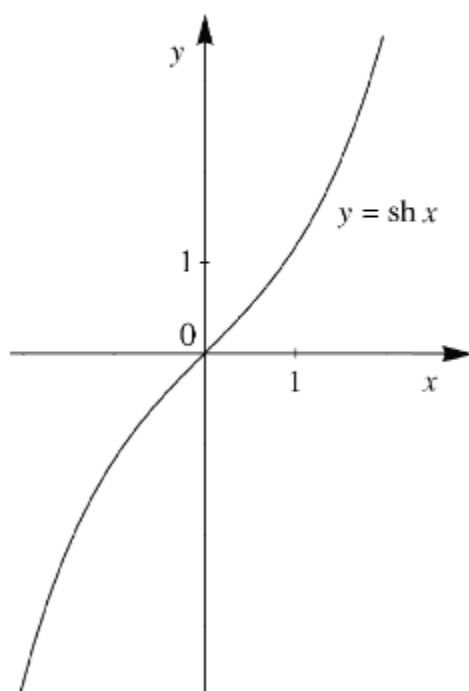


Рис. 27

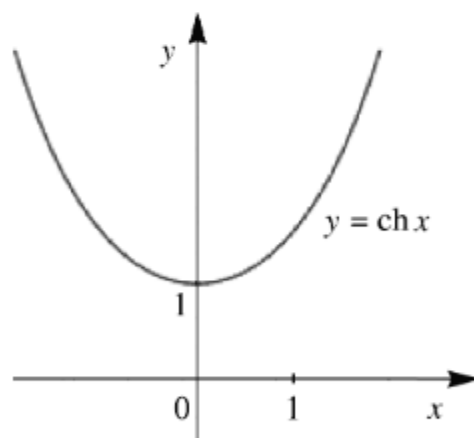


Рис. 28

3. Функция тангенс гиперболический

$$y = \operatorname{th} x, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad E(f) = (-1; 1).$$

Функция нечетная, строго возрастает (рис. 29).

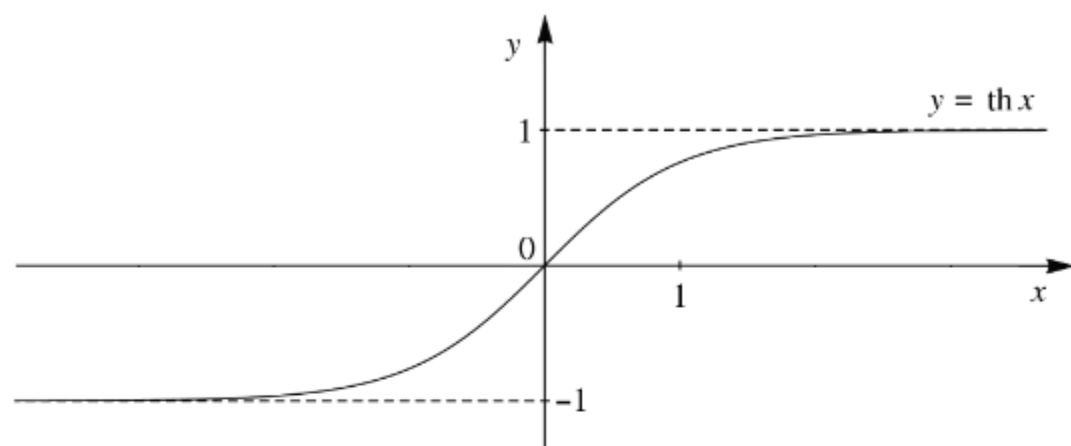


Рис. 29

4. Функция котангенс гиперболический

$$y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad E(f) = \mathbb{R} \setminus [-1; 1].$$

Функция нечетная, строго убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ (рис. 30).

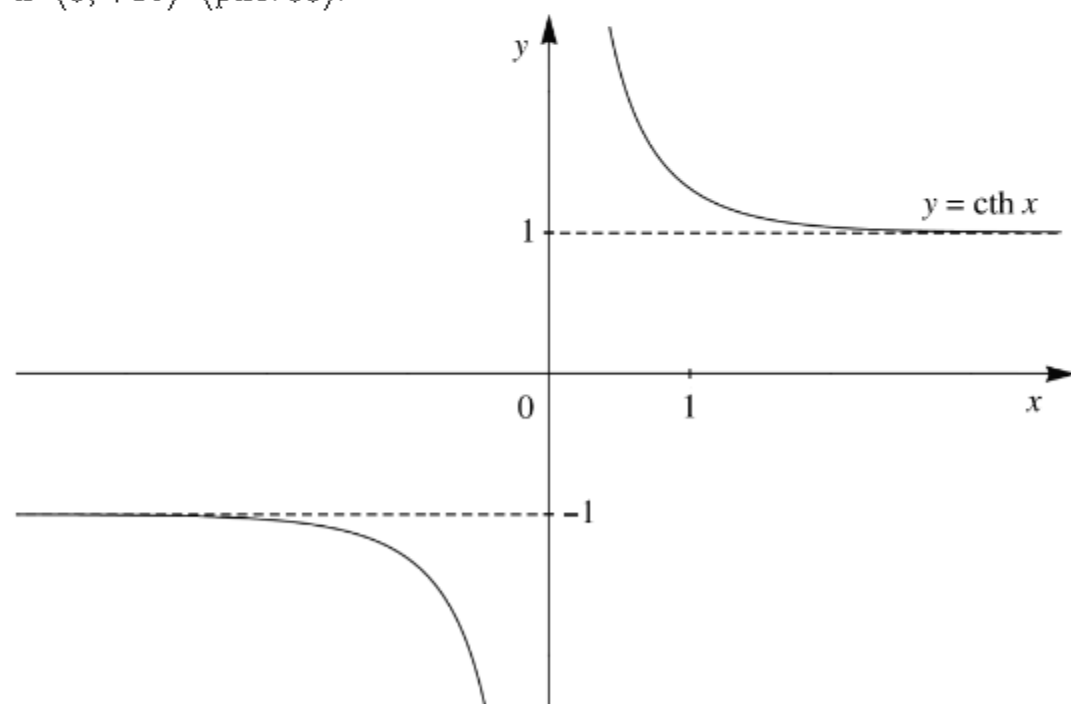


Рис. 30

Гиперболические функции удовлетворяют равенствам и соотношениям, во многом аналогичным тем, которые имеют место для тригонометрических функций. Рассмотрим, например,

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1.\end{aligned}$$

Таким образом, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ для любых $x \in \mathbb{R}$. Аналогично могут быть доказаны, например, такие соотношения*:

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x, \quad 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x, \quad \operatorname{th} x \operatorname{cth} x = 1,$$

$$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad 1 - \operatorname{cth}^2 x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1), \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1),$$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

5.6.9. Обратные гиперболические функции

1. Функция аркасинус

$$y = \operatorname{arsh} x.$$

Функция является обратной к функции $y = \operatorname{sh} x$, следовательно, $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \mathbb{R}$. Функция нечетная, строго возрастает. Построим обратную функцию для $y = \operatorname{sh} x$. Для этого рассмотрим равенство $y = \operatorname{sh} x$ как уравнение относительно x . Получим

$$y = \operatorname{sh} x \Leftrightarrow y = (e^x - e^{-x})/2.$$

* Более обширный набор формул можно найти, например, в справочнике В. Т. Воднева, А. Ф. Наумовича, Н. Ф. Наумовича «Основные математические формулы» (Минск: Вышэйшая школа, 1988), а также в справочнике Г. Б. Двайта «Таблицы интегралов и другие математические формулы» (М.: Наука, 1977).

В этом выражении положим e^x равным t , тогда

$$2y = t - \frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 - 2yt - 1 = 0,$$

откуда $t_1 = y + \sqrt{y^2 + 1}$ и $t_2 = y - \sqrt{y^2 + 1}$. Поскольку $e^x > 0$ для любых x , то корень t_2 посторонний, и тогда $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$, откуда $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$. Переобозначая переменные, получим

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Таким образом,

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

График функции аресинус показан на рис. 31.

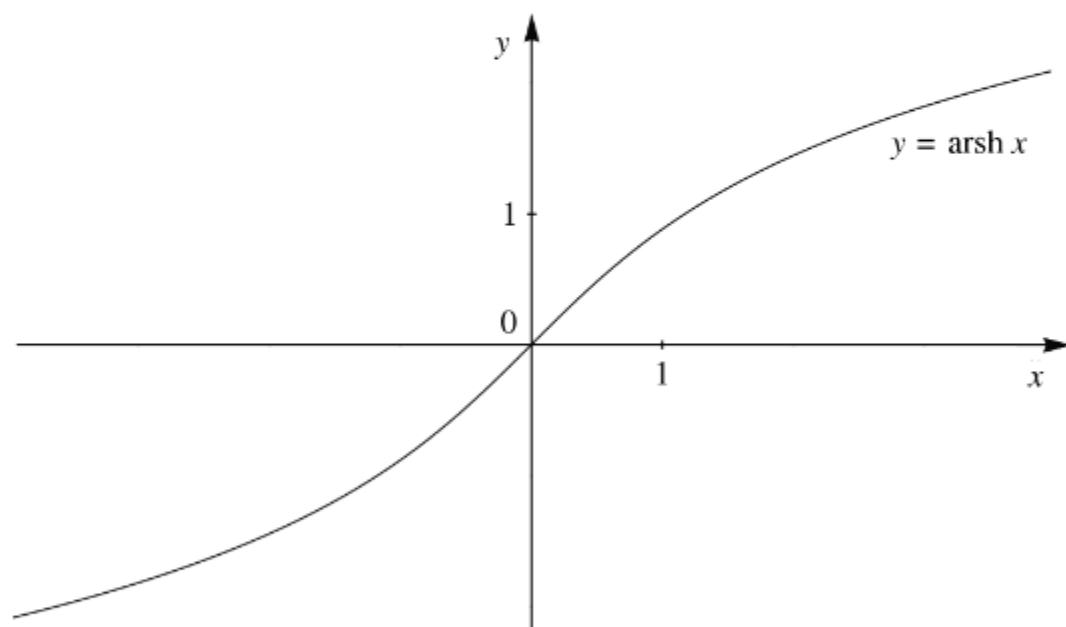


Рис. 31

2. Функция аресинус

$$y = \operatorname{arch} x.$$

Функция является обратной по отношению к функции $y = \operatorname{ch} x$. Поскольку функция $y = \operatorname{ch} x$ не является инъективной,

то построить функцию, обратную для функции $y = \operatorname{ch} x$, можно на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[0; +\infty)$ (рис. 32).

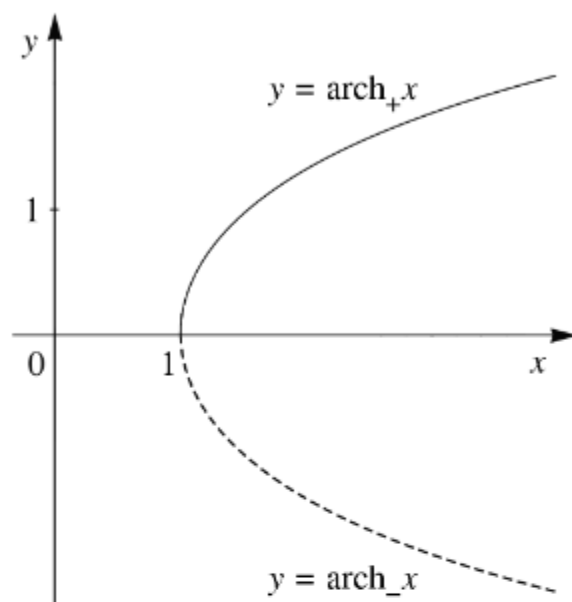


Рис. 32

Если $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [0; +\infty)$, то $y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
 $D(f) = [1; +\infty)$, $E(f) = [0; +\infty)$. Функция строго возрастает.

Для $y = \operatorname{ch} x$, $x \in (-\infty; 0]$, обратная функция

$$y = \operatorname{arch} x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}).$$

$D(f) = [1; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; 0]$. Функция строго убывает (рис. 32).

3. Функция аретангенс

$$y = \operatorname{arth} x.$$

Функция является обратной к функции $y = \operatorname{th} x$:

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$D(f) = (-1; 1)$, $E(f) = \mathbb{R}$. Функция нечетная, строго возрастает (рис. 33).

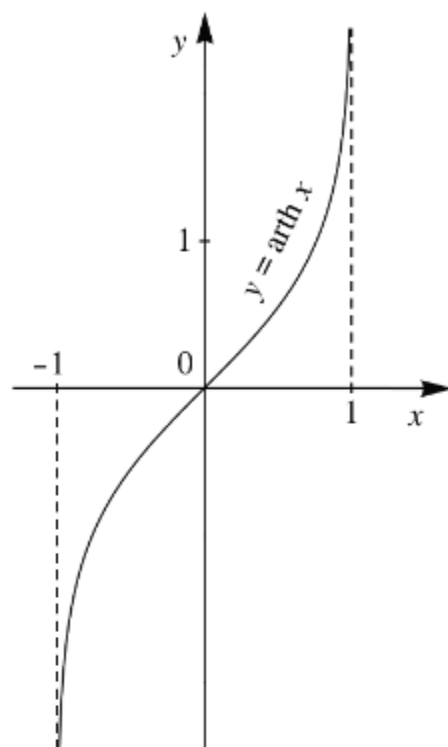


Рис. 33

4. Функция арекотангенс

$$y = \operatorname{arcth} x.$$

Функция является обратной к функции $y = \operatorname{cth} x$:

$$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus [-1; 1]$, $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Функция нечетная, строго убывает на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ (рис. 34).

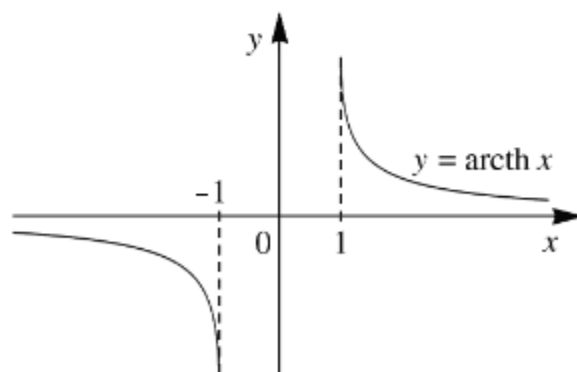


Рис. 34

5.7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Функции: 1) $y = C$ (постоянная); 2) $y = x$ (идентичная); 3) $y = \sin x$; 4) $y = e^x$ называются *простейшими элементарными функциями*. Всякая функция, составленная из простейших с помощью конечного числа операций: а) арифметических (+, -, $\times$, :), б) композиции, в) обращения, называется *элементарной функцией*. Элементарными будут, например, следующие функции:

- 1) многочлен $y = P_n(x)$, где $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$;
- 2) рациональная (частное двух многочленов) $y = P_n(x)/Q_m(x)$;
- 3) показательная $y = a^x$;
- 4) логарифмическая $y = \log_a x$;
- 5) тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
- 6) гиперболические $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$;
- 7) обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$;
- 8) обратные гиперболические $y = \operatorname{arsh} x$, $y = \operatorname{arch} x$, $y = \operatorname{arth} x$, $y = \operatorname{arch} x$.

Примеры неэлементарных функций:

- 1) функция модуль

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

(график функции см. в § 6.2, рис. 38);

- 2) функция сигнум (знак числа)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

(график функции см. в § 6.2, рис. 35);

- 3) функция Хевисайда (функция единичного скачка)

$$y = 1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

(график функции см. в § 6.2, рис. 36).

5.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

Рассмотрим функцию $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть множество X содержит некоторую окрестность $U(a)$ точки a , т.е. интервал $(\alpha; \beta)$, $\alpha < a < \beta$, за исключением, быть может, самой точки a .

Число A называют *пределом функции f в точке a* , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ (δ зависит от ε) такое, что $\forall x \in X$, удовлетворяющего условию $0 < |x - a| \leq \delta_\varepsilon$, выполняется неравенство

$$|f(x) - A| \leq \varepsilon.$$

Если число A является пределом функции f в точке a , то употребляют следующие формы записи: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_a f = A$, $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$.

Критерий Гейне. Для того чтобы $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности (x_n) , где $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$, $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$, было выполнено стремление $f(x_n) \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$.

Пример 5.11. Исходя из определения предела, доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x = 1.$$

Решение. Для любого $\varepsilon > 0$ требуется найти $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x$, $0 < |x| \leq \delta_\varepsilon$, выполняется неравенство $|\cos 2x - 1| \leq \varepsilon$.

Преобразуем модуль разности

$$\begin{aligned} |\cos 2x - 1| &= |1 - \cos 2x| = |2 \sin^2 x| = 2|\sin x| \cdot |\sin x| \leq \\ &\leq \left[|\sin x| \leq 1, |\sin x| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R} \right] \leq 2 \cdot 1 \cdot |x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |x| \leq \varepsilon/2 =: \delta_\varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \varepsilon/2, \forall x, 0 < |x| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |\cos 2x - 1| \leq \varepsilon$. Это и означает, что $\lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x = 1$.

Пример 5.12. Доказать, исходя из определения, что

$$\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 25.$$

Решение. Зададим $\forall \varepsilon > 0$. Покажем, что $\exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x$, $0 < |x - 5| \leq \delta_\varepsilon$, выполняется неравенство $|x^2 - 25| \leq \varepsilon$.

Рассмотрим модуль разности

$$\begin{aligned} |x^2 - 25| &= |(x + 5)(x - 5)| = |((x - 5) + 10)(x - 5)| = \\ &= |(x - 5)^2 + 10(x - 5)| \leq \left[|a + b| \leq |a| + |b| \right] \leq |x - 5|^2 + 10|x - 5| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Решим относительно $|x - 5|$ квадратичное неравенство

$$|x - 5|^2 + 10|x - 5| - \varepsilon \leq 0,$$

получим

$$0 < |x - 5| \leq -5 + \sqrt{25 + \varepsilon} =: \delta_\varepsilon.$$

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon = -5 + \sqrt{25 + \varepsilon}$, $\forall x$, $0 < |x - 5| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |x^2 - 25| \leq \varepsilon$. А это означает, что $\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 25$.

Так как важно лишь существование δ_ε , то более удобным является следующий подход. Выберем множество $|x - 5| \leq 1$, содержащее точку $x = 5$, т.е. $x \in [4; 6]$.

Тогда

$$\begin{aligned} |x^2 - 25| &= |(x + 5)(x - 5)| = [|ab| = |a||b|] = |x + 5||x - 5| \leq \\ &\leq 11|x - 5| \leq \varepsilon \Rightarrow |x - 5| \leq \varepsilon/11 \end{aligned}$$

и $\delta_\varepsilon = \min\{1, \varepsilon/11\}$. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$, $\forall x$, $0 < |x - 5| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |x^2 - 25| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 25$.

Пример 5.13. Доказать, исходя из определения, что

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 6} = \frac{6}{5}.$$

Решение. Требуется доказать, что $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$, $\forall x$, $0 < |x + 3| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 6} - \frac{6}{5} \right| \leq \varepsilon$.

Рассмотрим модуль разности

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 6} - \frac{6}{5} \right| = \left| \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-2)} - \frac{6}{5} \right| = \\
& = \left| \frac{x-3}{x-2} - \frac{6}{5} \right| = \left| \frac{5x - 15 - 6x + 12}{5(x-2)} \right| = \left| \frac{-x-3}{5(x-2)} \right| = \frac{|x+3|}{5|x-2|} \leq \\
& \leq \left[\text{возьмем множество } |x+3| \leq 1/2, \text{ содержащее точку } x = -3, \right. \\
& \left. \text{т.е. } x \in [-7/2; -5/2] \Rightarrow |x-2| \geq \frac{9}{2} \right] \leq \frac{2|x+3|}{5 \cdot 9} \leq \varepsilon \Rightarrow |x+3| \leq \frac{45}{2} \varepsilon.
\end{aligned}$$

Из неравенств $|x+3| \leq \frac{45}{2} \varepsilon$ и $|x+3| < \frac{1}{2}$ следует, что $\delta_\varepsilon = \min \left\{ \frac{1}{2}; \frac{45}{2} \varepsilon \right\}$. Итак, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \min \left\{ \frac{1}{2}; \frac{45}{2} \varepsilon \right\}, \forall x, 0 < |x+3| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 6} - \frac{6}{5} \right| \leq \varepsilon. \text{ Значит,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 6} = \frac{6}{5}.$$

Пусть функция f определена для достаточно больших по модулю x , т.е. на множестве $X = (-\infty; \beta) \cup (\alpha; +\infty)$.

Число A называют *пределом функции* f при $x \rightarrow \infty$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x, |x| \geq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon$, и записывают $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A, f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow \infty, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} A$.

Пример 5.14. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2} = 1$.

Решение. Требуется доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x, |x| \geq \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

Рассмотрим модуль разности

$$\left| \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2} - 1 \right| = \left| \frac{x^2 + 3x + 1 - x^2 - 2}{x^2 + 2} \right| = \left| \frac{3x - 1}{x^2 + 2} \right| = \frac{|3x - 1|}{x^2 + 2} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left[|a - b| \leq |a| + |b| \right] \leq \frac{3|x| + 1}{x^2 + 2} \leq \frac{3|x| + 1}{x^2} \leq \\ &\leq \left[\text{возьмем } x \text{ такие, что } |x| \geq 1 \right] \leq \frac{3|x| + |x|}{x^2} = \frac{4|x|}{|x|^2} = \frac{4}{|x|} \leq \varepsilon \Rightarrow \\ &\Rightarrow |x| \geq \frac{4}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Из неравенств $|x| \geq 1$ и $|x| \geq \frac{4}{\varepsilon}$ следует, что $\delta_\varepsilon = \max \left\{ 1; \frac{4}{\varepsilon} \right\}$.

Итак, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \max \left\{ 1; \frac{4}{\varepsilon} \right\}, \forall x, |x| \geq \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2} - 1 \right| \leq \varepsilon$.

А это и означает, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2} = 1$.

Замечание.

а) Пусть $X = (\beta; +\infty)$, тогда запись $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x, x \geq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon$.

б) Пусть $X = (-\infty; \alpha)$, тогда запись $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x, x \leq -\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon$.

Говорят, что *предел функции f в точке a равен бесконечности*, и пишут $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ или $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x, 0 < |x - a| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| \geq \varepsilon$.

Пример 5.15. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 1}{1 - x^2} = \infty$.

Решение. Требуется доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x, 0 < |x - 1| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{3x + 1}{1 - x^2} \right| \geq \varepsilon$.

Рассмотрим модуль

$$\begin{aligned} &\left| \frac{3x + 1}{1 - x^2} \right| = \left| \frac{3x + 1}{(1 - x)(1 + x)} \right| = \frac{|3x + 1|}{|1 - x||1 + x|} \geq \\ &\geq \left[\text{возьмем } x \in [0; 2], \text{ т. е. } |x - 1| \leq 1 \right] \geq \frac{1}{|x - 1| \cdot 3} \geq \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| \leq \frac{1}{3\varepsilon}. \end{aligned}$$

Из неравенств $|x - 1| \leq 1$ и $|x - 1| \leq \frac{1}{3\varepsilon}$ следует, что $\delta_\varepsilon = \min \left\{ 1; \frac{1}{3\varepsilon} \right\}$.

Итак, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \min \left\{ 1; \frac{1}{3\varepsilon} \right\}, \forall x, 0 < |x - 1| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{3x + 1}{1 - x^2} \right| \geq \varepsilon$. Это означает, что $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 1}{1 - x^2} = \infty$.

Упражнение 5.8. Доказать, используя определение предела функции (по ε найти δ_ε), следующие равенства.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x + 3} - 1) = 1.$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{3}{2}.$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2 + x + 1} = 0.$
4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{2}.$
5. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7.$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sin 3x}{2x^2 + 3} = 0.$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 \sin x}{3x + 2} = 0.$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \cos x}{x + 2} = 0.$

5.9. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИИ

Пусть существуют и конечны $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Тогда справедливы следующие свойства.

1. Предел линейной комбинации функций с постоянными коэффициентами равен линейной комбинации пределов с теми же коэффициентами, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \beta \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

В частности: а) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, т. е. предел суммы (разности) равен сумме (разности) пределов; б) $\lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ постоянный множитель можно выносить за знак предела.

2. Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))(\lim_{x \rightarrow a} g(x)).$$

3. Предел частного равен частному пределов при условии, что предел знаменателя отличен от нуля:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

Замечание. Если предел числителя существует и не равен нулю, а предел знаменателя равен нулю, то предел частного равен бесконечности. Например, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x} = \infty$, так как $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

Замечание. Если предел числителя существует и конечен, а предел знаменателя есть бесконечность, то предел частного равен нулю. Например, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^{1/x^2}} = 0$, так как $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x^2} = +\infty$.

Отметим, что при нахождении пределов функций (как и пределов последовательностей) теоремы о пределах не всегда применимы. При нахождении пределов функций приходится иногда иметь дело с неопределенностями вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 . Процесс нахождения пределов в таких случаях называют «раскрытием неопределенностей».

4. Если существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, причем $f(x) \neq b$ при $x \neq a$, и существует $\lim_{t \rightarrow b} g(t)$, то в точке a существует предел композиции $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, т. е. существует $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow b} g(t)$. Это свойство позволяет вычислять пределы, переходя от переменной x к новой переменной t , полагая $t = f(x)$.

Например,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +0} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \right) = \\ & = \left[(\infty - \infty), \text{ замена: } \frac{1}{x} = t, x \rightarrow +0 \Rightarrow t \rightarrow +\infty \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} (\sqrt{t+t^2} - t) = [(\infty - \infty)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{t+t^2} - t)(\sqrt{t+t^2} + t)}{\sqrt{t+t^2} + t} = \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+t^2 - t^2}{\sqrt{t^2+t} + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{t\left(\sqrt{1+\frac{1}{t}} + 1\right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t}} + 1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Замечание. Если функция g непрерывна в точке b , то свойство 4 можно записать в следующем виде:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x)),$$

т. е. если функция непрерывна, то можно перейти к пределу под знаком функции. Например, $\lim_{x \rightarrow 0} e^{(1+x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)} = e^1 = e$.

5. Если $f(x) \leq g(x)$, $x \neq a$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Если исходное неравенство строгое: $f(x) < g(x)$, $x \neq a$, то при переходе к пределу неравенство может оказаться нестрогим, т. е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Например, $\frac{\sin x^2}{1+x^2} < \frac{x^2}{1+x^2}$, $x \neq 0$, однако $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1+x^2} = 0$.

6. Если $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$, то и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$.

Пример 5.16. Найти $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{3 - \sqrt{4-x}}{x + \sqrt{-5x}}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -5} \frac{3 - \sqrt{4-x}}{x + \sqrt{-5x}} &= \left[\left(\frac{0}{0} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(3 - \sqrt{4-x})(3 + \sqrt{4-x})(x - \sqrt{-5x})}{(3 + \sqrt{4-x})(x + \sqrt{-5x})(x - \sqrt{-5x})} = \\
&= [(a-b)(a+b) = a^2 - b^2] = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(9 - (4-x))(x - \sqrt{-5x})}{(3 + \sqrt{4-x})(x^2 + 5x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(5+x)(-10)}{6x(x+5)} = \frac{-10}{6 \cdot (-5)} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Пример 5.17. Найти $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 - \sqrt{10+x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 - \sqrt{10+x}}{1 + \sqrt[3]{x}} &= \left[\left(\frac{0}{0} \right) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3 - \sqrt{10+x})(3 + \sqrt{10+x})(1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(3 + \sqrt{10+x})(1 + \sqrt[3]{x})(1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} = \\ &= \left[(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(9 - (10+x)) \cdot 3}{6(1+x)} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{1+x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 5.18. Найти $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{(x+1)(4x+1)} + 2x)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{(x+1)(4x+1)} + 2x) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)(4x+1) - 4x^2}{\sqrt{(x+1)(4x+1)} - 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+1}{\sqrt{4x^2+5x+1} - 2x} = \left[\sqrt{x^2} = |x| = -x, x < 0 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(5 + \frac{1}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 \right)} = -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Упражнение 5.9. Найти пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 3} - \sqrt{8 - x^2}}{x^2 - 1}$. (Ответ: $\sqrt{7}/4$).
2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+6}}{\sqrt{3x-5} - \sqrt{x+1}}$. (Ответ: $1/3$).
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 25} - 5}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}$. (Ответ: $3/5$).
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$. (Ответ: 3).
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} - \sqrt{x^4 - 2x^2 - 1})$. (Ответ: 2).

5.10. ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

Пусть множество задания функции f содержит интервал $(l; a)$. Число A называют пределом функции f в точке a слева или *левосторонним пределом* функции f в точке a , если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x, a - \delta_\varepsilon \leq x < a \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon$. Обозначают предел слева в точке a символом $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ или $f(a-0)$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0) = A.$$

Если $a = 0$, то пишут $f(-0)$ или $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$.

В случае, когда множество задания функции f содержит интервал $(a; c)$, определяют предел справа, или *правосторонний предел* функции f в точке a : $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ или $f(a+0)$. Запись $A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ означает, что $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x, a < x \leq a + \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon$.

Если $a = 0$, то в этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ или $f(+0)$.

Функция f имеет предел в точке a тогда и только тогда, когда $\exists f(a+0), \exists f(a-0)$ и они равны. При этом $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a-0) = f(a+0)$.

Если множество задания функции f содержит интервал $(\alpha; +\infty)$ или интервал $(-\infty; \beta)$, то вводятся понятия предела при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$. Эти пределы обозначают

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad (f(+\infty)) \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad (f(-\infty)).$$

Например, число A называют пределом функции f при $x \rightarrow +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x, x \geq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon$.

Для односторонних пределов справедливы теоремы о пределе линейной комбинации, произведения, частного, о пределе композиции функций.

По аналогии с конечными односторонними пределами определяются и бесконечные односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ и т. д.

Например, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$ означает, что $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x, a - \delta_\varepsilon \leq x < a \Rightarrow f(x) \leq -\varepsilon$.

Пример 5.19. Найти односторонние пределы $f(2+0)$, $f(2-0)$, если $f(x) = x + \frac{2}{1 + 2^{1/(2-x)}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2+0} \left(x + \frac{2}{1 + 2^{1/(2-x)}} \right) = \left[x \rightarrow 2+0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \right. \\ &\Rightarrow 2-x < 0 \Rightarrow \frac{1}{2-x} \rightarrow -\infty, 2^{1/(2-x)} \rightarrow 0, 1 + 2^{1/(2-x)} \rightarrow 1 \Big] = 2 + 2 = 4, \\ \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-0} \left(x + \frac{2}{1 + 2^{1/(2-x)}} \right) = \left[x \rightarrow 2-0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow \right. \\ &\Rightarrow 2-x > 0 \Rightarrow \frac{1}{2-x} \rightarrow +\infty, 2^{1/(2-x)} \rightarrow +\infty, 1 + 2^{1/(2-x)} \rightarrow +\infty \Big] = \\ &= 2 + 0 = 2. \end{aligned}$$

Пример 5.20. Найти односторонние пределы $f(-2+0)$, $f(-2-0)$, если $f(x) = 1(x^2 + 5x + 6) \operatorname{sgn} \frac{\pi x}{4}$.

Решение. Поскольку $x^2 + 5x + 6 = 0$ при $x = -2$ и $x = -3$, то $x^2 + 5x + 6 > 0$ для $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; +\infty)$ и $x^2 + 5x + 6 < 0$ для $x \in (-3; -2)$. Таким образом,

$$1(x^2 + 5x + 6) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty; -3) \cup (-2; +\infty), \\ 0, & x \in (-3; -2). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2+0} \left(1(x^2 + 5x + 6) \operatorname{sgn} \frac{\pi x}{4} \right) = 1 \cdot (-1) = -1, \\ \lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2-0} \left(1(x^2 + 5x + 6) \operatorname{sgn} \frac{\pi x}{4} \right) = 0 \cdot (-1) = 0. \end{aligned}$$

Упражнение 5.10. Найти односторонние пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$.

1. $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x}, \quad x_0 = 1.$

(Ответ: $f(1-0) = \frac{\pi}{2}, \quad f(1+0) = -\frac{\pi}{2}$).

2. $f(x) = \frac{x+2}{2+e^{2/x}}, \quad x_0 = 0.$ (Ответ: $f(-0) = 1, \quad f(+0) = 0$).

3. $f(x) = 1(\sin x), \quad x_0 = \pi.$ (Ответ: $f(\pi-0) = 1, \quad f(\pi+0) = 0$).

4. $f(x) = \frac{2x-3|x|}{x}, \quad x_0 = 0.$ (Ответ: $f(-0) = 5, \quad f(+0) = -1$).

5. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos \pi x), \quad x_0 = 1/2.$

(Ответ: $f\left(\frac{1}{2}-0\right) = 1, \quad f\left(\frac{1}{2}+0\right) = -1$).

6. $f(x) = (\sqrt{(x-1)(x+3)} - x), \quad x_0 = \infty.$

(Ответ: $f(+\infty) = 1, \quad f(-\infty) = +\infty$).

7. $f(x) = \frac{x+1}{e^{\sin x} - e^{\cos x}}, \quad x_0 = 0.$ (Ответ: $f(-0) = f(+0) = \frac{1}{1-e}$).

5.11. СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Пусть функции f и g определены в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(a)$ точки a , т.е. в окрестности $U(a)$ без самой точки a . Функцию f называют *бесконечно малой функцией* (бмф) при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. Функцию f называют *бесконечно большой функцией* (ббф) при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций

1. Линейная комбинация с постоянными коэффициентами конечного числа бмф при $x \rightarrow a$ есть бмф.

2. Произведение бмф при $x \rightarrow a$ на ограниченную в некоторой окрестности точки a функцию есть бмф.

3. Если f есть ббф при $x \rightarrow a$, а g в некоторой окрестности точки a удовлетворяет неравенству $|g(x)| > C, \quad x \neq a, \quad C > 0$, то $f(x)g(x)$ есть ббф. В частности, произведение двух ббф при $x \rightarrow a$ есть ббф при $x \rightarrow a$.

4. Функция $f(x)$, $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \dot{U}(a)$, является бмф при $x \rightarrow a$ тогда и только тогда, когда $1/f(x)$ есть ббф при $x \rightarrow a$.

Пусть f и g бмф при $x \rightarrow a$ и $g(x) \neq 0$, $x \in \dot{U}(a)$. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то говорят, что функция f является *бесконечно малой более высокого порядка*, чем g , и записывают $f = o(g)$, $x \rightarrow a$, или $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$.

Функции f и g называют *бмф одного порядка* при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = C$, где $C \neq 0$, $C \neq \infty$. При этом иногда употребляют запись $f = O^*(g)$, $x \rightarrow a$.

Запись $f = O(g)$, $x \rightarrow a$ (или $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow a$) означает, что $\exists \dot{U}(a)$, $\exists M > 0$ такие, что для $\forall x \in \dot{U}(a)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M|g(x)|$.

Запись $f = o(1)$ при $x \rightarrow a$ означает, что f является бмф при $x \rightarrow a$.

Запись $f = O(1)$ при $x \rightarrow a$ означает, что функция f ограничена в некоторой окрестности точки a .

Если функции f и g являются ббф при $x \rightarrow a$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то функцию f называют *бесконечно большой меньшего порядка*, чем g , или говорят, что g есть ббф более высокого порядка, чем f , и записывают $f = o(g)$, $x \rightarrow a$.

Если $\exists \dot{U}(a)$, $\exists M > 0$ такие, что $|f(x)| \leq M|g(x)| \quad \forall x \in \dot{U}(a)$, то записывают $f = O(g)$, $x \rightarrow a$.

Символы o и O называют *символами Ландау*.

Имеют место, например, следующие соотношения (f, g бмф, $x \rightarrow a$):

1) $o(f) + o(f) = o(f)$ при $x \rightarrow a$, т.е. сумма двух функций, являющихся бмф более высокого порядка, чем f , также бмф более высокого порядка, чем f ;

2) $o(f) + O(f) = O(f)$;

3) $g = o(f) \Rightarrow g = O(f)$;

4) $g \cdot o(f) = o(f \cdot g)$ (например, $x^2 \cdot o(x) = o(x^3)$, $x \rightarrow 0$);

5) $o(f) \cdot o(f) = o(f^2)$;

6) $o(f) + o(f^2) = o(f)$.

Замечание. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то записывают $f = o(g)$, $x \rightarrow a$, даже если f и g не являются бмф (или ббф).

Пример 5.21. Доказать, что $\frac{x+1}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \rightarrow +\infty$.

Решение. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x^2+1} : \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x^2+1} \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+x}{x^2+1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1. \end{aligned}$$

Поскольку функция имеет конечный предел при $x \rightarrow a$, то она ограничена в некоторой окрестности точки a . Следовательно, $\exists M > 0$, $\exists C > 0$ такие, что $\frac{x+1}{x^2+1} : \frac{1}{x} \leq M \quad \forall x \geq C$, т.е. $\frac{x+1}{x^2+1} \leq M \frac{1}{x}$ для $x \geq C$. А это означает, что $\frac{x+1}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow +\infty$.

5.12. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ замечательный тригонометрический предел.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ замечательный степенно-показательный предел.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

Используя замену переменных и приведенные замечательные пределы, вычислим следующие пределы. Пусть $\alpha(x)$ бмф при $x \rightarrow a$, т.е. $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$. Тогда имеют место следующие равенства.

$$6. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = [\alpha(x) = t, \ x \rightarrow a \Rightarrow t \rightarrow 0] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow a} (1 + \alpha(x))^{1/\alpha(x)} = [\alpha(x) = t, \ x \rightarrow a \Rightarrow t \rightarrow 0] = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} = e. \text{ Следовательно, и } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(1 + \alpha(x))}{\alpha(x)} = [\alpha(x) = t, \ x \rightarrow a \Rightarrow t \rightarrow 0] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{t} = 1.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = [\alpha(x) = t, \ x \rightarrow a \Rightarrow t \rightarrow 0] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow a} \frac{(1 + \alpha(x))^\beta - 1}{\alpha(x)} = [\alpha(x) = t, \ x \rightarrow a \Rightarrow t \rightarrow 0] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 + t)^\beta - 1}{t} = \beta.$$

Пример 5.22. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2 - x)}{x - 1}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2 - x)}{x - 1} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + (1 - x))}{-(1 - x)} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + (1 - x))}{(1 - x)} = -1,$$

так как $\alpha(x) = (1 - x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 1$.

Пример 5.23. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = \left[\alpha(x) = \frac{1}{x^2}, \ \alpha(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty \right] = e.$$

Пример 5.24. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} &= \left[\arcsin x = t, \quad x = \sin t, \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.\end{aligned}$$

Из примера следует, что $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\arcsin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$, если $\alpha(x)$ бмф при $x \rightarrow a$. Аналогично вычисляется $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ и, следовательно, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{arctg} \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$, если $\alpha(x)$ бмф при $x \rightarrow a$.

Пример 5.25. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right)^{4x+5}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right)^{4x+5} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(2x+3)-2}{2x+3} \right)^{4x+5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-2}{2x+3} \right)^{\frac{2x+3}{-2}} \right)^{\frac{-2}{2x+3}(4x+5)} = \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{2x+3} \right)^{\frac{2x+3}{-2}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(4x+5)}{2x+3} = -4 \right] = e^{-4}.\end{aligned}$$

Пример 5.26. Найти $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-3}{x^2-5x+6} \right)^{\frac{3x-1}{x^2+2x-15}}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-3}{x^2-5x+6} \right)^{\frac{3x-1}{x^2+2x-15}} &= \\ &= \left[x^2-5x+6 = (x-2)(x-3), \quad x^2+2x-15 = (x-3)(x+5) \right] =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-2} \right)^{\frac{3x-1}{(x+5)(x-3)}} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(1 + \frac{1}{x-2} - 1 \right)^{\frac{3x-1}{(x+5)(x-3)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \left(1 + \frac{3-x}{x-2} \right)^{\frac{3x-1}{(x+5)(x-3)}} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\left(1 + \frac{3-x}{x-2} \right)^{\frac{x-2}{3-x}} \right)^{\frac{-(3x-1)}{(x+5)(x-2)}} = \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-3x}{(x+5)(x-2)}} = e^{-1}.
\end{aligned}$$

Упражнение 5.11. Найти пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$. (Ответ: $1/e$).
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x}$. (Ответ: 1).
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin 4x)}{4^{\operatorname{tg} x} - 1}$. (Ответ: $-2/\ln 2$).
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos 4x)}{\operatorname{sh}(\sin^2 x)}$. (Ответ: 8).
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{1 - \operatorname{ch}^2 x}$. (Ответ: $-1/3$).
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \cos \frac{2}{x}$. (Ответ: -2).
7. $\lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{2x+1}{2+x-x^2}}$. (Ответ: $e^{5/3}$).
8. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+4x} - 2x)^{\frac{x^2+1}{x^2+x}}$. (Ответ: 1).

5.13. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Функции f и g называют *локально эквивалентными* или *асимптотически эквивалентными* при $x \rightarrow a$ (коротко эквивалентными при $x \rightarrow a$), если они определены в некоторой проколотой окрестности точки a , отличны от нуля в этой окрестности и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Эквивалентность функций f и g будем записывать как $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow a$.

Отметим, что из $f(x) \sim g(x)$, $g(x) \sim h(x)$ при $x \rightarrow a$ следует $f(x) \sim h(x)$ при $x \rightarrow a$ (свойство транзитивности).

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $A \neq 0$, то $f(x) \sim A$ при $x \rightarrow a$.

Теорема. Две бесконечно малые при $x \rightarrow a$ функции f и g эквивалентны тогда и только тогда, когда разность между ними есть бмф более высокого порядка, чем каждая из них, т. е. $(f \sim g \text{ при } x \rightarrow a) \Leftrightarrow (f = g + o(g), x \rightarrow a, \text{ и } g = f + o(f), x \rightarrow a)$.

Если $f = g + o(g)$, $x \rightarrow a$, то g называют *главной частью* бмф f при $x \rightarrow a$. Другими словами, g есть главная часть f при $x \rightarrow a$, если $f \sim g$ при $x \rightarrow a$. Для бмф f ее главная часть определяется неоднозначно. Обычно указывают вид главной части. Чаще всего выделяют главную часть степенного вида $C(x-a)^\alpha$, $C \neq 0$, $\alpha > 0$ ($f(x) = C(x-a)^\alpha + o((x-a)^\alpha)$, $x \rightarrow a$), или $f(x) \sim C(x-a)^\alpha$, $x \rightarrow a$. Если главная часть степенного вида существует, то она определяется единственным образом.

Пример 5.27. Найти главную часть степенного вида Cx^n при $x \rightarrow 0$ для функции $1 - \cos x$.

Решение.

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} \sim 2 \frac{x}{2} \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

Таким образом, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $x \rightarrow 0$.

Из полученного результата следует, что $1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$, если $\alpha(x)$ бмф при $x \rightarrow a$.

Пример 5.28. Найти главную часть степенного вида Cx^n при $x \rightarrow 0$ для функции $\operatorname{tg} x$.

Решение.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \sim \frac{x}{1} = x.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} x \sim x$, $x \rightarrow 0$, и $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$, если $\alpha(x)$ бмф при $x \rightarrow a$.

Пример 5.29. Найти главную часть степенного вида Cx^n при $x \rightarrow 0$ для функции $a^x - 1$, $a > 0$.

Решение. $a^x - 1 = e^{x \ln a} - 1 \sim x \ln a$, так как $x \ln a = \alpha(x)$ бмф при $x \rightarrow 0$. Таким образом, $a^x - 1 \sim x \ln a$, $a > 0$, а $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$, где $\alpha(x)$ бмф при $x \rightarrow a$.

Пример 5.30. Найти главную часть степенного вида Cx^n при $x \rightarrow 0$ для функции $\operatorname{sh} x$.

Решение.

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(e^x - \frac{1}{e^x} \right) = \frac{1}{2} \frac{e^{2x} - 1}{e^x} \sim \frac{1}{2} \frac{2x}{1} = x.$$

Таким образом, $\operatorname{sh} x \sim x$, а $\operatorname{sh} \alpha(x) \sim \alpha(x)$, если $\alpha(x)$ бмф при $x \rightarrow a$.

Пример 5.31. Найти главную часть степенного вида Cx^n при $x \rightarrow 0$ для функции $\operatorname{ch} x - 1$.

Решение.

$$\operatorname{ch} x - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = 2 \operatorname{sh} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2} \sim 2 \frac{x}{2} \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

Следовательно, $\operatorname{ch} x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$, а тогда $\operatorname{ch} \alpha(x) - 1 \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$, если $\alpha(x)$ бмф при $x \rightarrow a$.

Пример 5.32. Найти главную часть степенного вида Cx^n при $x \rightarrow 0$ для функции $\operatorname{arsh} x$.

Решение. Вычислим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arsh} x}{x} = \left[\operatorname{arsh} x = t, x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0, x = \operatorname{sh} t \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{sh} t} = 1.$$

Следовательно, $\operatorname{arsh} x \sim x$, а $\operatorname{arsh} \alpha(x) \sim \alpha(x)$, если $\alpha(x)$ бмф при $x \rightarrow 0$.

Аналогично показывается, что $\operatorname{arctg} x \sim x$, $\operatorname{th} x \sim x$, $x \rightarrow 0$, и $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$, $\operatorname{th} \alpha(x) \sim \alpha(x)$, если $\alpha(x)$ бмф при $x \rightarrow 0$.

Таблица основных эквивалентностей

$x \rightarrow 0$	$\alpha(x)$ бмф
$\sin x \sim x$	$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$	$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$
$\arcsin x \sim x$	$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\operatorname{arctg} x \sim x$	$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$e^x - 1 \sim x$	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
$a^x - 1 \sim x \ln a$	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$
$\operatorname{sh} x \sim x$	$\operatorname{sh} \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\operatorname{ch} x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$	$\operatorname{ch} \alpha(x) - 1 \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$
$\operatorname{th} x \sim x$	$\operatorname{th} \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\ln(1+x) \sim x$	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
$(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$	$(1+\alpha(x))^\mu - 1 \sim \mu \alpha(x)$

Пример 5.33. Найти главную часть степенного вида Cx^n при $x \rightarrow \infty$ для многочлена $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$.

Решение.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n} \right) \sim \left[\frac{1}{x}, \dots, \frac{1}{x^n} \right] \text{ бмф при } x \rightarrow \infty \sim a_n x^n.$$

Следовательно, $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \sim a_n x^n$ при $x \rightarrow \infty$.

Пример 5.34. Найти главную часть степенного вида Cx^n при $x \rightarrow 0$ для многочлена $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_m x^m$, $a_m \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$, $n > m$.

Решение.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_m x^m = \\ = a_m x^m \left(\frac{a_n}{a_m} x^{n-m} + \frac{a_{n-1}}{a_m} x^{n-m-1} + \dots + \frac{a_{m+1}}{a_m} x + 1 \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_m x^m.$$

Внимание! При нахождении пределов функций множители в числителе и знаменателе можно заменять эквивалентными. Это не меняет значения предела, если он существует.

Действительно, если $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, т. е. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x)h(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} g(x)h(x) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x \rightarrow a} g(x)h(x) = \lim_{x \rightarrow a} (g(x)h(x)). \end{aligned}$$

Пример 5.35. Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}, \quad a_n \neq 0, \quad b_m \neq 0, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Решение. Так как $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} a_n x^n$ и $b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} b_m x^m$, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \\ &= \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{n-m}} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & m = n, \\ 0, & m > n, \\ \infty, & m < n. \end{cases} \end{aligned}$$

Пример 5.36. Используя замену эквивалентными, найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(5^{2\sqrt[5]{x^4}} - 1) \operatorname{arctg} \sqrt[5]{x}}{\ln(1 + \arcsin 5x)}.$$

Решение. Так как $\sqrt[5]{x^4}$, $\arcsin 5x$ и $\operatorname{arctg} \sqrt[5]{x}$ бмф при $x \rightarrow 0$, то $\operatorname{arctg} \sqrt[5]{x} \sim \sqrt[5]{x}$, $\ln(1 + \arcsin 5x) \sim \arcsin 5x \sim 5x$, $5^{2\sqrt[5]{x^4}} - 1 \sim 2\sqrt[5]{x^4} \ln 5$ при $x \rightarrow 0$, и поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(5^{2\sqrt[5]{x^4}} - 1) \operatorname{arctg} \sqrt[5]{x}}{\ln(1 + \arcsin 5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x} 2\sqrt[5]{x^4} \ln 5}{\arcsin 5x} =$$

$$= \frac{2 \ln 5}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{1/5+4/5}}{x} = \frac{2 \ln 5}{5}.$$

Пример 5.37. Используя эквивалентные функции, найти

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \cos \frac{5}{3x}}{\ln \cos \frac{3}{5x}}.$$

Решение. Отметим, что $1/x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, а $\cos \frac{5}{3x} \rightarrow 1$ и $\cos \frac{3}{5x} \rightarrow 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \cos \frac{5}{3x}}{\ln \cos \frac{3}{5x}} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \left(\cos \frac{5}{3x} - 1 \right) \right)}{\ln \left(1 + \left(\cos \frac{3}{5x} - 1 \right) \right)} = \\ &= \left[\text{при } x \rightarrow \infty \cos \frac{5}{3x} - 1 \text{ и } \cos \frac{3}{5x} - 1 \text{ бмф} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{5}{3x} - 1}{\cos \frac{3}{5x} - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{5}{3x}}{1 - \cos \frac{3}{5x}} = \left[\frac{5}{3x} \text{ и } \frac{3}{5x} \text{ бмф при } x \rightarrow +\infty \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{3x} \right)^2 / 2}{\left(\frac{3}{5x} \right)^2 / 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^2 \cdot 5^2 \cdot x^2}{3^2 \cdot x^2 \cdot 3^2} = \frac{5^4}{3^4} = \frac{625}{81}. \end{aligned}$$

Пример 5.38. При каких значениях α и β функция $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} - \alpha x - \beta$ является бесконечно малой при $x \rightarrow \infty$?

Решение. Найдем α и β , при которых предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ будет равен нулю. Так как $\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} = x - 3 + \frac{5x+3}{(x+1)^2}$, то $\alpha = 1$, $\beta = -3$.

Упражнение 5.12. Найти пределы, используя замену эквивалентными функциями.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{e^{3x} - 1}. \quad (\text{Ответ: } 2/9).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{\ln(1 + \operatorname{tg} x)}. \quad (\text{Ответ: } 1/2).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \arcsin x} - 1}{\operatorname{arctg} 3x}. \quad (\text{Ответ: } 1/6).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos 2x)(1 - \cos 3x)}{e^{\sin 3x^2} - 1}. \quad (\text{Ответ: } 3).$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{2x} - 1}{\ln(1 + \operatorname{sh} 3x)}. \quad (\text{Ответ: } \frac{4}{3} \ln 2).$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{1/x} - 1}{\arcsin \frac{1}{x}}. \quad (\text{Ответ: } \ln 2).$$

Упражнение 5.13. При каких значениях α и β функция $f(x)$ является бесконечно малой?

$$1. f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} - \alpha x - \beta, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (\text{Ответ: } \alpha = 2, \beta = 1/4).$$

$$2. f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} - \alpha x - \beta, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (\text{Ответ: } \alpha = -2, \beta = -1/4).$$

$$3. f(x) = \ln(1 + e^{3x}) - \alpha x - \beta, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (\text{Ответ: } \alpha = 3, \beta = 0).$$

$$4. f(x) = \ln(1 + e^{3x}) - \alpha x - \beta, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (\text{Ответ: } \alpha = 0, \beta = 0).$$

При нахождении пределов можно использовать равенства

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \quad a > 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0.$$

Пример 5.39. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2^x + 1}{x^3 + 3^x + \ln x}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2^x + 1}{x^3 + 3^x + \ln x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \left(\frac{x^2}{2^x} + 1 + \frac{1}{2^x} \right)}{3^x \left(\frac{x^3}{3^x} + 1 + \frac{\ln x}{3^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{3^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^x = \left[\text{если } |q| < 1, \text{ то } q^x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty \right] = 0. \end{aligned}$$

Пример 5.40. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{\sin 2x^2}$.

Решение. Так как $\cos 3x - \cos 5x = 2 \sin \frac{5x-3x}{2} \sin \frac{5x+3x}{2} = 2 \sin x \sin 4x$, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{\sin 2x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \sin 4x}{\sin 2x^2} = \\ &= \left[\text{замена эквивалентными функциями} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot 4x}{2x^2} = 4. \end{aligned}$$

Пример 5.41. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \operatorname{tg} x} - 1}{e^{x^2} - 1}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \operatorname{tg} x} - 1}{e^{x^2} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x \operatorname{tg} x)^{1/2} - 1}{e^{x^2} - 1} = \\ &= \left[x \operatorname{tg} x \text{ и } x^2 \text{ бмф при } x \rightarrow 0, \text{ замена эквивалентными} \right. \\ &\quad \left. \text{функциями} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x \operatorname{tg} x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \operatorname{tg} x}{x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 5.42. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}} = \\ & = \left[2x \quad \text{бмф при } x \rightarrow 0, \text{ замена эквивалентными функциями} \right] = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^2/2}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})}{2 - (1 + \cos x)} = \\ & = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x}) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2/2} \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Пример 5.43. Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2} &= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4 + 4 - x^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2^x - 4) + (4 - x^2)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4}{x - 2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 \left(\frac{2^x}{4} - 1 \right)}{x - 2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(2^{x-2} - 1)}{x - 2} - \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = \left[(x - 2) \quad \text{бмф при } x \rightarrow 2, \right. \\ & \left. \text{замена эквивалентными функциями} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x - 2) \ln 2}{x - 2} - 4 = \\ &= 4 \ln 2 - 4 = 4(\ln 2 - 1). \end{aligned}$$

Пример 5.44. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - \sqrt{x})^{\frac{1}{1-x}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} (2 - \sqrt{x})^{\frac{1}{1-x}} = (1^\infty) = \\ & = [\text{основное логарифмическое тождество } a^b = e^{b \ln a}] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{1-x} \ln(2-\sqrt{x})} = \left[e^x \quad \text{непрерывная функция} \right] = \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-\sqrt{x})}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+(1-\sqrt{x}))}{1-x}} = \left[(1-\sqrt{x}) \quad \text{бмф при } x \rightarrow 1, \right. \\
&\quad \left. \text{замена эквивалентными функциями} \right] = \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}}} = e^{1/2}.
\end{aligned}$$

Пример 5.45. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(4^{\frac{1}{x}} - 4^{\frac{1}{x+1}} \right)$.

Решение.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(4^{\frac{1}{x}} - 4^{\frac{1}{x+1}} \right) = \left[(\infty \cdot 0) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 4^{\frac{1}{x+1}} \left(4^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} - 1 \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 4^{\frac{1}{x+1}} \left(4^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1 \right) = \left[4^{\frac{1}{x+1}} \sim 1, \quad \frac{1}{x(x+1)} \quad \text{бмф при } x \rightarrow \infty, \right. \\
&\quad \left. \text{замена эквивалентными функциями} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{x(x+1)} \ln 4 = \\
&= \ln 4 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = \ln 2^2 \cdot 1 = 2 \ln 2.
\end{aligned}$$

Замечание. Замена слагаемых эквивалентными, вообще говоря, недопустима. Однако иногда можно использовать таблицу основных эквивалентностей в виде $f = g + o(g)$.

Из известных нам эквивалентностей при $x \rightarrow 0$ вытекают следующие формулы:

$$\sin x = x + o(x), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \arcsin x = x + o(x),$$

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x), \quad \operatorname{tg} x = x + o(x), \quad \ln(1+x) = x + o(x),$$

$$e^x = 1 + x + o(x), \quad (1+x)^\mu = 1 + \mu x + o(x),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \operatorname{sh} x = x + o(x).$$

Пример 5.46. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sin^3 x + \ln^2(1+x^2)}{\operatorname{sh} x + 1 - \operatorname{ch} x + x^4}$.

Решение. Так как $\sin x = x + o(x)$, $\ln(1+x) = x + o(x)$, $\operatorname{sh} x = x + o(x)$, $1 - \operatorname{ch} x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sin^3 x + \ln^2(1+x^2)}{\operatorname{sh} x + 1 - \operatorname{ch} x + x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + (x+o(x))^3 + (x^2+o(x^2))^2}{x+o(x) - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^3 + o(x^3) + x^4 + o(x^4)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2. \end{aligned}$$

Пример 5.47. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 3x - \ln(1+2x) + \operatorname{arctg}^2 x}{e^x - 1 + x^2 + x}$.

Решение. Так как $\operatorname{sh} 3x = 3x + o(x)$, $\ln(1+2x) = 2x + o(x)$, $\operatorname{arctg} x = x + o(x)$, $e^x - 1 = x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 3x - \ln(1+2x) + \operatorname{arctg}^2 x}{e^x - 1 + x^2 + x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + o(x) - 2x + o(x) + x^2 + o(x^2)}{x + o(x) + x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{2x + o(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отметим, что с помощью использования только эквивалентных функций не всегда возможно найти правильный ответ.

Пример 5.48. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$.

Решение. По таблице основных эквивалентностей найдем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x) - x + o(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^3} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Однако

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(1 - \frac{1}{\cos x} \right)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = -1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{x^2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Упражнение 5.14. Найти пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\operatorname{tg} x^2}.$ (Ответ: $-1/2$).

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\ln \left(1 + \frac{x}{3} \right) - \ln \frac{x}{3} \right).$ (Ответ: 3).

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x^2} + x^3 - 1}{\ln \cos x}.$ (Ответ: $-1/2$).

4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{arctg}(3-x) + \sin(x-3)^2}{x^2 - 9}.$ (Ответ: $-1/6$).

5. Определить, при каких α и β функции $f(x) = 2e^{x^4} + (\cos x - 1)^2 + x^5 - 2$ и $g(x) = \alpha x^\beta$ эквивалентны при $x \rightarrow 0$.
(Ответ: $\alpha = 9/4$, $\beta = 4$).

Замечание. Для дифференцируемых функций $f(x)$ и $g(x)$ при нахождении пределов используют правило Лопиталья и формулу Тейлора, которые будут рассмотрены в главе 7.

Задачи для индивидуальных и контрольных заданий

5.1. Доказать, используя определение предела функции (по ε найти δ_ε), следующие равенства.

1. $\lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x+11} + 2) = 5.$ 2. $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{1+x} + \sqrt{6+x}) = 5.$

3. $\lim_{x \rightarrow -1} (4 - \sqrt{5+x}) = 2.$ 4. $\lim_{x \rightarrow 3\pi/2} \sin x = -1.$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 4} = 0.$ 6. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x - 6) = 0.$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin^2 x + 2 \cos x) = 2.$ 8. $\lim_{x \rightarrow 1} \sin^2 \pi x = 0.$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0.$ 10. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \sin \frac{x}{x-1} = 0.$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{3x+2} = \frac{1}{2}.$ 12. $\lim_{x \rightarrow 4} (3x - 13) = -1.$

13. $\lim_{x \rightarrow \pi/12} \sin 2x = \frac{1}{2}.$ 14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x+5}{3x+1} = 5.$

$$15. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x + 1} = 1.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow -1} (3 - 4x^2) = -1.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} = 7.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{2x + 2} = 4.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1} = 6.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{6x^2 + x - 1}{x + 1/2} = -5.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2 + x - 1}{x - 1/3} = 5.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \pi/6} (4 + 3 \sin x) = \frac{11}{2}.$$

5.2. Найти пределы.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 5x} - \sqrt{1 - 7x}}{(1 + x)^6 - 1}. \quad (\text{Ответ: } 1).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{8 - x} - 1 + 2x}{1 + 3x + \sqrt{5 + x}}. \quad (\text{Ответ: } 22/39).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{2x - 1}}{\sqrt{5x - 1} - 2}. \quad (\text{Ответ: } -4/5).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 4}{\ln(1 - x \sin x)}. \quad (\text{Ответ: } -1/8).$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - 2x^2)}{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 - 2x}}. \quad (\text{Ответ: } 2).$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3 + 2x} + 1 + 2x}{\sqrt{5 + x} + x - 1}. \quad (\text{Ответ: } 12/5).$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}. \quad (\text{Ответ: } 4/3).$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{x - 8}. \quad (\text{Ответ: } 1/5).$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{(x + 2)(x + 3)} + x). \quad (\text{Ответ: } -5/2).$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x - 2} - 2}{x^2 - 6x}. \quad (\text{Ответ: } 1/24).$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 - \sqrt{10 + x}}{1 + \sqrt[3]{x}}. \quad (\text{Ответ: } -1/2).$$

5.3. Найти пределы.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2(4-2x)^2}{(2x+3)^4}. \quad (\text{Ответ: } 1/4).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3+4x-13)^6}{(2x^6+7x-3)^3}. \quad (\text{Ответ: } 8).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x^{11}+9x^{13})^3}{(1+x^2+x^4)^{10}}. \quad (\text{Ответ: } 0).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+5x^2}{x^2+4} - x \right). \quad (\text{Ответ: } 5).$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2x+1} + \frac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2} \right). \quad (\text{Ответ: } -9/4).$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)^5+2(x-4)^5+7(x+1)^5}{2x^5+25}. \quad (\text{Ответ: } 5).$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} + \frac{x^2+2x+3}{2-x} \right). \quad (\text{Ответ: } -4).$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^5(1-x)^2}{(2x^2+1)^2(2-x-4x^3)}. \quad (\text{Ответ: } -2).$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(2x^2+3x+4)^3}{(x^2-x+1)^3(1-2x)}. \quad (\text{Ответ: } -4).$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4+2x^2}{x+2} - x^3+2x^2-6x \right). \quad (\text{Ответ: } -12).$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+14x}{2x+\sqrt[3]{x^2}}. \quad (\text{Ответ: } 7).$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(1-2x)(1-3x)(1-4x)}{(x^2-2)(x^2+4)}. \quad (\text{Ответ: } 24).$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2} + \frac{x^4+4x^3-2}{1-2x^3} \right). \quad (\text{Ответ: } -2).$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x^3+9x^2+2x+5}{3x^2+2} - 2x-1 \right). \quad (\text{Ответ: } 2).$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2-x+1)^5(3-2x)^3}{(x^5+3x^3+1)(2x^2+17)^4}. \quad (\text{Ответ: } -1/2).$$

16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - 2x + 1)^8 (4 - x)^3}{(4x^8 + 2x^4 + 1)^2 (32x^3 + 79)}.$ (Ответ: $-1/2$).
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^3 + 6x^2 - x + 8}{2x^2 + 2x + 3} - 2x + 1 \right).$ (Ответ: 2).
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - 1)^6 + 3(x - 2)^6 - 4(x - 3)^6}{(x^3 - 2)(x^2 + x + 1)}.$ (Ответ: 30).
19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - \sqrt{3x^5 - x}}{(x^2 - x \cos x + 1)\sqrt{x}}.$ (Ответ: $-\sqrt{3}$).
20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 4x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 1} - \frac{2x^3 + 6x^2 - x - 2}{4x^2 + 1} \right).$ (Ответ: $1/2$).
21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3x^2 - 10x + \frac{2 - 3x + 5x^2 - 6x^3}{5 + 2x} \right).$ (Ответ: $-53/2$).
22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 2)^8 + 3(x + 3)^8 - 4(x - 1)^8}{(x^2 + 3)^2 (8x - 1)^3}.$ (Ответ: $15/64$).

5.4. Найти пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right).$ (Ответ: -1).
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x - 2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right).$ (Ответ: $+\infty$).
3. $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{3x + 13}{x^2 + 4x + 3} - \frac{2x + 16}{x^2 + x - 6} \right).$ (Ответ: $-1, 7$).

5.5. Найти пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right).$ (Ответ: 0).
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 - \sqrt{25 - \sin^2 5x}}{1 - \cos 2x}.$ (Ответ: $\frac{5}{4}$).
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16 - \sin^2 x} - \sqrt{16 + \sin^2 x}}{1 - \cos^2 x}.$ (Ответ: $-\frac{1}{4}$).
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x^2 - 4x + 2} - 1}{\operatorname{tg} \pi x^2}.$ (Ответ: $\frac{1}{2\pi}$).

5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{5+x} - 2}{\sin \pi x}$. (Ответ: $-\frac{1}{12\pi}$).
6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(\sqrt{2x^2 - 3x - 5} - \sqrt{x+1})}{\sqrt[3]{9x} - 3}$. (Ответ: 6).
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 - \sqrt{49 - \sin^3 3x}}{(x^2 + x)(1 - \cos 3x)}$. (Ответ: $\frac{3}{7}$).
8. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt[3]{x+1} - 2) \sin \pi x}{\sqrt{\cos(7-x)} - 1}$. (Ответ: $\frac{\pi}{3}$).
9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} - \sqrt{2x+1} + 5}{x^3 - 1}$. (Ответ: $-\frac{\ln 2}{9}$).
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{3x+4}}{\cos \frac{\pi(x+1)}{2}}$. (Ответ: $\frac{3}{2\pi}$).

5.6. Найти пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$. (Ответ: $-2/3$).
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{1 - \cos 2x}$. (Ответ: 2).
3. $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin\left(x + \frac{5\pi}{3}\right)}$. (Ответ: $\sqrt{3}$).
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x \cos 4x}{1 - \cos 3x}$. (Ответ: $20/9$).
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\operatorname{tg}^2 x + 1 - \cos 2x}$. (Ответ: $1/3$).
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 - \cos 2x)}{(\cos x - \cos 2x) \sin^2 x}$. (Ответ: $2/3$).
7. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin 2x - \sin x}$. (Ответ: $1/3$).
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right)$. (Ответ: $1/2$).

5.7. Найти пределы.

$$1. \lim_{x \rightarrow e^2} \frac{\ln x - 2}{x - e^2}. \quad (\text{Ответ: } e^{-2}).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^{x^2} - 1}. \quad (\text{Ответ: } 1).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 3x} - e^{\sin 2x}}{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x}. \quad (\text{Ответ: } 1).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2^{\operatorname{tg} x}}{\ln(1 - \sin 3x)}. \quad (\text{Ответ: } \frac{\ln 2}{3}).$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3 - 2 \cos 3x)}{\sin(\operatorname{sh}^2 x)}. \quad (\text{Ответ: } 9).$$

5.8. Найти односторонние пределы $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$.

$$1. f(x) = \frac{\sin x}{|x|}, \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } f(-0) = -1, \quad f(+0) = 1).$$

$$2. f(x) = \frac{3+x}{3-e^{\frac{x}{2-x}}}, \quad x_0 = 2. \quad (\text{Ответ: } f(2-0) = 0, \quad f(2+0) = \frac{5}{3}).$$

$$3. f(x) = \frac{\sqrt{1 + \cos 2x}}{\cos x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}. \\ (\text{Ответ: } f(\pi/2 - 0) = \sqrt{2}, \quad f(\pi/2 + 0) = -\sqrt{2}).$$

$$4. f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 2, \\ -2x + 1, & x > 2, \end{cases} \quad x_0 = 2. \\ (\text{Ответ: } f(2 - 0) = 3, \quad f(2 + 0) = -3).$$

$$5. f(x) = 3 + \frac{1}{1 + 7^{\frac{1}{1-x}}}, \quad x_0 = 1. \\ (\text{Ответ: } f(1 - 0) = 3, \quad f(1 + 0) = 4).$$

$$6. f(x) = \operatorname{sgn} \cos \frac{\pi x}{2} + 1(2x^2 - x - 1), \quad x_0 = 1. \\ (\text{Ответ: } f(1 - 0) = 1, \quad f(1 + 0) = 2).$$

$$7. f(x) = \frac{1(2-x)}{x + 2^{\frac{1}{x-2}}}, \quad x_0 = 2. \\ (\text{Ответ: } f(2 - 0) = 1/2, \quad f(2 + 0) = 0).$$

8. $f(x) = 1(4 + 4x - 3x^2) + 2\operatorname{sgn}(x - 2)$, $x_0 = 2$.
(Ответ: $f(2 - 0) = -1$, $f(2 + 0) = 2$).
9. $f(x) = \operatorname{sgn}(3x + 3) + 1(2x^2 + x - 1)$, $x_0 = -1$.
(Ответ: $f(-1 - 0) = 0$, $f(-1 + 0) = 1$).
10. $f(x) = \sin 2x \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
(Ответ: $f(\frac{\pi}{2} - 0) = 2$, $f(\frac{\pi}{2} + 0) = -2$).
11. $f(x) = \frac{7(9 - x^2) + |9 - x^2|}{5(9 - x^2) - |9 - x^2|}$, $x_0 = 3$.
(Ответ: $f(3 - 0) = 2$, $f(3 + 0) = 1$).
12. $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + x^2}}{\sin 2x}$, $x_0 = 0$.
(Ответ: $f(-0) = -1/2$, $f(+0) = 1/2$).

5.9. Найти пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\ln(1 + \arcsin^2 2x)}$. (Ответ: 2).
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{arctg} 4x}$. (Ответ: 1/2).
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg\left(1 - \frac{1}{2} \sin x\right)}{e^x - 1}$. (Ответ: $-\frac{1}{2 \ln 10}$).
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x^2} - 1}{\ln(1 + \sin^2 2x)}$. (Ответ: $\frac{1}{4} \ln 2$).
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\ln(1 + \arcsin x)}$. (Ответ: 1).
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos 2x)}{e^{\sin^2 x} - 1}$. (Ответ: 2).
7. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 + \sin^2 4x)}{\operatorname{tg} x (e^{\sin^2 4\sqrt{x}} - 1)}$. (Ответ: 1).
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{3 \operatorname{sh} 2x}$. (Ответ: 1/2).

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - \ln 2}{1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}}}.$ (ОТВЕТ: 1).
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x^2}{e^{\sin x - \operatorname{sh} x} - 1}.$ (ОТВЕТ: 2).
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{sh} 3x)}{3^x - 1}.$ (ОТВЕТ: $\frac{3}{\ln 3}$).
12. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \cos^2 \sqrt{x}}{\operatorname{tg} 2x}.$ (ОТВЕТ: 1/2).
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x^2} - 1}{\ln(1 + \arcsin^2 x)}.$ (ОТВЕТ: $\ln 2$).
14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x - 1)}{(e^x - e)^2}.$ (ОТВЕТ: $\frac{1}{2e^2}$).
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} - 1\right)}{2^{2/x} - 1}.$ (ОТВЕТ: $\frac{1}{4 \ln 2}$).
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{1 - \operatorname{ch} 2x}.$ (ОТВЕТ: -1/2).
17. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{(1 - \cos \sqrt{x}) \sin^2(\sqrt{x})}.$ (ОТВЕТ: 1/2).
18. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - e^{2-x}}{\ln(x-1)}.$ (ОТВЕТ: 2).
19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(1-x)}{e^{x-1} - e^{1-x}}.$ (ОТВЕТ: -1/2).
20. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{tg} 2x \ln(1 + \operatorname{tg} 2x)}{\operatorname{arctg}^4(\sqrt{x})}.$ (ОТВЕТ: 4).
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x - 4x^3)(e^{\sin 3x} - 1)}{\arcsin x^2(e^x + e^{-x})}.$ (ОТВЕТ: 9/2).

22. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1 - \cos 3x} \cos^2 5x}{4 \operatorname{arctg} x - 1}.$ (Ответ: $\frac{3}{2\sqrt{2} \ln 2}$).
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2^x + x + x^2)}{e^{\sin 4x} - 1}.$ (Ответ: $\frac{1 + \ln 2}{4}$).
24. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{tg} 2x(1 - \cos \sqrt{x})}.$ (Ответ: 1).
25. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{(e^{\operatorname{arctg}^2(\sqrt{x})} - 1) \sin^2 \frac{x}{2}}{(\sqrt{4 + x^2} - \sqrt{4 - x^2}) \operatorname{tg} x}.$ (Ответ: 1/2).
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos x) \operatorname{sh} 3x}{(\sqrt[6]{1 + \arcsin x} - 1)(2x^2 - 1)}.$ (Ответ: 9/ln 2).
27. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{(4^{x^3 + x^2 + x} - 1) \operatorname{arctg}^2(\sqrt{x})}{\ln(1 + \sin x + \sin^2 x)(\sqrt{x} + x)^2}.$ (Ответ: 2 ln 2).
28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 4x}{\sqrt[6]{1 + 3 \arcsin x^2} - 1}.$ (Ответ: 32).
29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3 \sin^3 x) \cdot (5^x + 1)}{(e^{\operatorname{tg} x^2} - 1)(x - x^{11})}.$ (Ответ: 6).
30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 5x \cdot \sin(3x^4 + x^5)}{\operatorname{arctg}^2 x^2 (\sqrt[5]{1 + 5x^2} - 1)}.$ (Ответ: -75/2).
31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1 + 2x - 4x^2)}{2^{\sin(6x + 7x^2)} - 1}.$ (Ответ: $\frac{1}{3 \ln^2 2}$).
32. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{arctg}^2(3x + 2\sqrt{x})(1 - \cos 3x^2)}{(3x^5 - 1)(1 + 3 \sin x + 5 \cos x)}.$ (Ответ: $\frac{3}{\ln 3}$).
33. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[10]{1 + 9x^7} - 1}{(1 - \cos 3x)^3 \operatorname{sh}(x/5)}.$ (Ответ: 4/81).
34. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 5x} \right)^{\frac{3x^2 + 2x + 1}{x + \sqrt{x}}}.$ (Ответ: e^{-9}).
35. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x + 5}{5x + 3} \right)^{\frac{1 + 2x}{1 - x}}.$ (Ответ: $e^{3/4}$).

ГЛАВА 6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

6.1. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Функция f , определенная в окрестности точки x_0 , называется *непрерывной в этой точке*, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Непрерывность, как следует из определения, означает, что операции вычисления значения функции и перехода к пределу перестановочны, т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$.

Определение непрерывности равносильно следующему (на языке « ε - δ »). Функция f , определенная в окрестности точки x_0 , непрерывна в этой точке, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in D(f), |x - x_0| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

Разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента* в точке x_0 и обозначается Δx , т. е. $x - x_0 = \Delta x$, а разность $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется *приращением функции f в точке x_0* , соответствующим приращению Δx , и обозначается $\Delta f(x_0)$ (или, короче, Δy).

В терминах приращений определение непрерывности функции f в точке x_0 выглядит следующим образом. Функция f , определенная в окрестности точки x_0 , называется непрерывной в точке x_0 , если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall \Delta x, x_0 + \Delta x \in D(f), |\Delta x| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |\Delta f(x_0)| \leq \varepsilon$, т. е. функция f непрерывна в точке x_0 , если приращение функции стремится к нулю при стремлении к нулю приращения аргумента.

Пусть $[x_0; b) \subset D(f)$. Функция f называется *непрерывной справа в точке x_0* , если $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$ (т. е. $f(x_0 + 0) = f(x_0)$). Аналогично если $(a; x_0] \subset D(f)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$ (т. е. $f(x_0 - 0) = f(x_0)$), то функция f называется *непрерывной слева в точке x_0* . Для непрерывности функции f в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна в этой точке и справа, и слева.

По определению считаем функцию f непрерывной в изолированной точке.

Функция f называется *непрерывной на множестве X* , если она непрерывна в каждой точке множества X . Если X — промежуток и f определена в концевой точке этого промежутка, то под непрерывностью в этой точке понимают соответственно непрерывность справа или слева.

Множество всех функций, непрерывных на множестве X , обозначается символом $C(X)$. Например, запись $f \in C([a; b])$ будет означать, что функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ (в точке a непрерывна справа, в точке b непрерывна слева).

Пример 6.1. Покажем, что функция $f(x) = \sin x$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Пусть x_0 — произвольная точка из $\mathbb{R}$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= \left| 2 \cos \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq \\ &\leq \left[|\cos t| \leq 1, \quad |\sin t| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R} \right] \leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы $|\sin x - \sin x_0| \leq \varepsilon$. Это будет выполняться, если $|x - x_0| \leq \varepsilon$, откуда следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon = \varepsilon$ такое, что как только $|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon$, то $|\sin x - \sin x_0| \leq \varepsilon$. Это означает, что функция $\sin x$ непрерывна в точке x_0 . А поскольку x_0 произвольная точка из $\mathbb{R}$, то функция $\sin x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Пример 6.2. Докажем, что функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна на множестве ее задания. Функция f определена для $x \geq 0$. Возьмем произвольную точку x_0 , $x_0 > 0$, зададим любое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} \leq \varepsilon.$$

Последнее неравенство означает, что $|x - x_0| \leq \varepsilon \sqrt{x_0}$. Поэтому если положить $\delta_\varepsilon = \varepsilon \sqrt{x_0}$, то для $\forall \varepsilon > 0$ и $\delta_\varepsilon = \varepsilon \sqrt{x_0}$ из неравенства $|x - x_0| \leq \varepsilon \sqrt{x_0}$ следует выполнение неравенства

$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \varepsilon$, что означает непрерывность функции $f(x) = \sqrt{x}$ в любой точке x_0 , где $x_0 > 0$.

Покажем теперь, что функция f непрерывна в точке $x_0 = 0$ справа. Так как из неравенства $|f(x) - f(0)| = \sqrt{x} \leq \varepsilon$ следует неравенство $x \leq \varepsilon^2$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon = \varepsilon^2$ такое, что как только $0 \leq x \leq \varepsilon^2$, то $|f(x) - f(0)| = \sqrt{x} \leq \varepsilon$. А это означает, что $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} = 0$, т.е. функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна в точке $x_0 = 0$ справа. Объединяя сказанное, заключаем, что $\sqrt{x} \in C([0; +\infty))$.

Пример 6.3. Покажем, что функция $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$ непрерывна в точке $x_0 = 1$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим

$$|f(x) - f(1)| = \left| \frac{2x+1}{3x+2} - \frac{3}{5} \right| = \frac{|x-1|}{5|3x+2|} \leq$$

$\leq \left[\text{будем рассматривать функцию в окрестности точки } x_0 = 1, \right.$

$$\left. |x-1| < 1, \text{ т.е. } x \in (0; 2) \right] \leq \frac{|x-1|}{5 \cdot 2} \leq \varepsilon,$$

откуда $|x-1| \leq 10\varepsilon$. Поэтому если положить $\delta_\varepsilon = \min\{1; 10\varepsilon\}$, то $\forall \varepsilon > 0$ из $|x-1| \leq \delta_\varepsilon$ следует $|f(x) - f(1)| \leq \varepsilon$. А это означает, что f непрерывна в точке $x_0 = 1$.

6.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК РАЗРЫВА

Пусть x_0 — предельная точка множества задания $D(f)$ функции f и $x_0 \in D(f)$. Точка x_0 называется *точкой разрыва функции* f , если f не является непрерывной в точке x_0 . Условием непрерывности функции f в точке x_0 является выполнение равенства

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0),$$

где

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

Поэтому если x_0 — точка разрыва функции f , то нарушено одно из усиливающих требований: 1) левосторонний и правосторонний пределы функции существуют; 2) пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ конечны; 3) $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$; 4) $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$. В связи с этим используют следующую классификацию точек разрыва.

1. Если не существует по крайней мере один из односторонних пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$, то точка x_0 называется *точкой неопределенности*.

2. Если пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ существуют, но хотя бы один из них бесконечен, то точка x_0 называется *точкой бесконечного скачка*.

Точки неопределенности и бесконечного скачка называются *точками разрыва второго рода*.

3. Если пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ существуют, конечны, но $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то точка x_0 называется *точкой конечного скачка*. При этом величина $|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$ называется *скачком функции f в точке x_0* .

4. Если пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ существуют, конечны, равны друг другу, но не равны значению функции f в точке x_0 (т.е. $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$), то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* (иногда *устранимой точкой разрыва*).

Точки конечного скачка и устранимого разрыва относятся к *точкам разрыва первого рода*.

Замечание. В определениях 1–3 значение функции f в точке x_0 не участвует. Поэтому иногда точку x_0 называют точкой разрыва функции f и в случае, когда точка x_0 не принадлежит множеству задания функции f , но функция f определена в проколотой окрестности точки x_0 .

Отметим также, что функция $f : |a; b| \rightarrow \mathbb{R}$ называется *кусочно-непрерывной* на промежутке $|a; b|$, если на любом отрезке $[\alpha; \beta] \subset |a; b|$ она может иметь лишь конечное число точек разрыва, причем все они являются точками разрыва первого рода.

Пример 6.4. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

точка x_0 является точкой неопределенности. Для доказательства рассмотрим две последовательности: $x'_n = \frac{1}{\pi n}$ и $x''_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$, каждая из которых стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Получим, что $f(x'_n) = \sin \pi n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а $f(x''_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. На основании критерия Гейне (см. § 5.8) делаем вывод, что предел $f(x)$ при $x \rightarrow +0$ не существует, следовательно, точка $x_0 = 0$ является точкой неопределенности.

Пример 6.5. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

точка $x_0 = 0$ является точкой бесконечного скачка, так как $f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$, $f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -\infty$.

Пример 6.6. Для функции

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

точка $x_0 = 0$ является точкой конечного скачка, так как $\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sgn} x = -1$, $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sgn} x = 1$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$. При этом скачок функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ равен 2.

График функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ выглядит следующим образом (рис. 35).

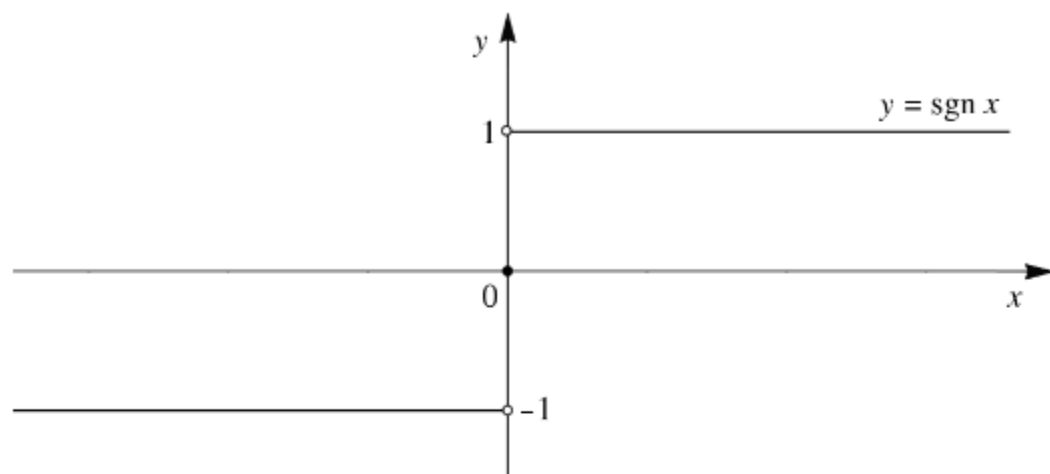


Рис. 35

Пример 6.7. Исследуем на непрерывность функцию

$$f(x) = 1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

в точке $x_0 = 0$. Найдем $f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} 1(x) = 1$, $f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} 1(x) = 0$, $f(0) = 1$. Полученные значения пределов позволяют заключить, что точка $x_0 = 0$ является точкой конечного скачка функции $f(x) = 1(x)$ и скачок функции в этой точке равен 1. Рассматриваемая функция называется *функцией единичного скачка* или *функцией Хевисайда*. Ее график имеет следующий вид (рис. 36).

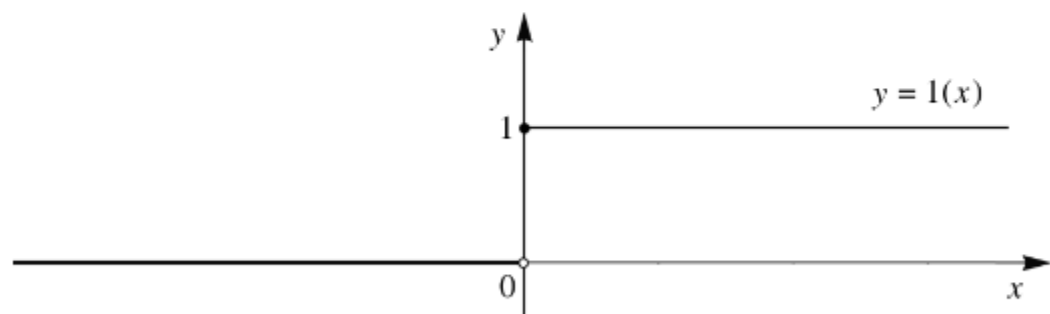


Рис. 36

Пример 6.8. Для функции $f(x) = 1(x) + 1(-x)$ точка $x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва, поскольку $f(-0) = 1$,

$f(+0) = 1, f(0) = 2$ (рис. 37).

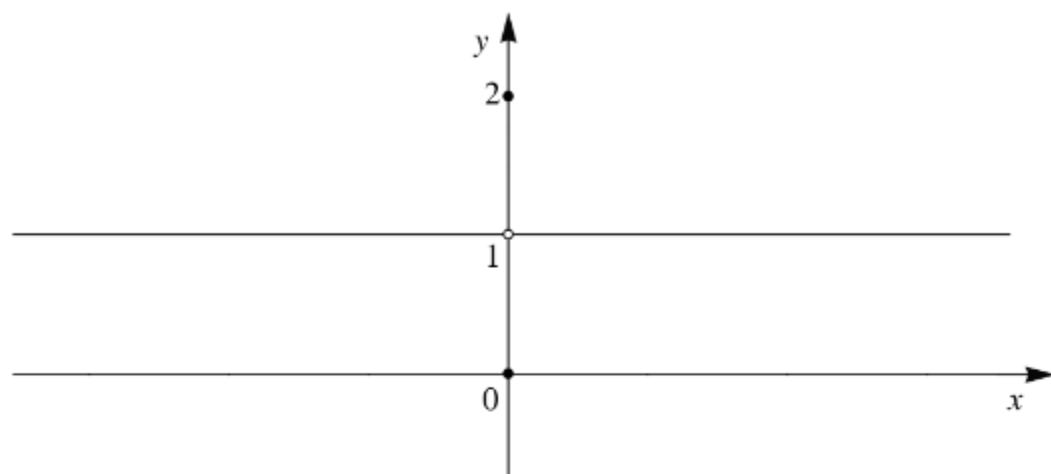


Рис. 37

Пример 6.9. Функция

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

непрерывна в точке $x_0 = 0$, так как $f(-0) = f(+0) = f(0) = 0$. График функции выглядит следующим образом (рис. 38).

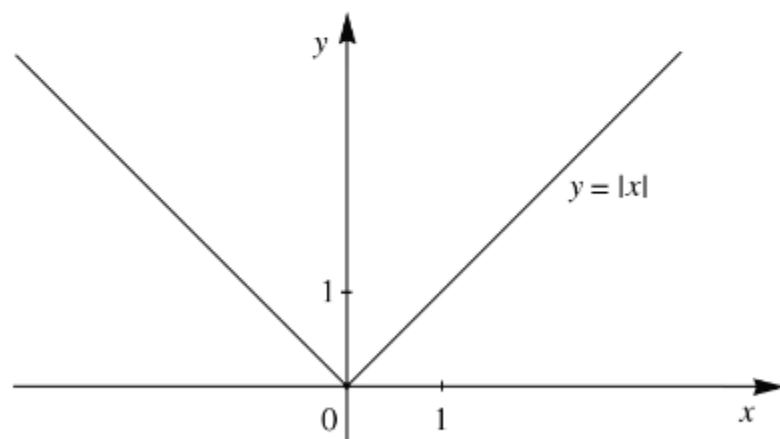


Рис. 38

Заметим, что $|x| = x \operatorname{sgn} x$. Это следует из определений функций $|x|$ и $\operatorname{sgn} x$.

6.3. ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Если f непрерывна в точке x_0 , то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

2. Если f и g непрерывны в точке x_0 , то в этой точке будут непрерывны: а) их линейная комбинация с постоянными коэффициентами; б) произведение; в) частное при условии, что знаменатель отличен от нуля (т.е. функции $\alpha f + \beta g$, где α и β постоянные, fg и f/g , $g(x_0) \neq 0$).

3. *Теорема о стабилизации знака.* Если f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует такая окрестность точки x_0 , для всех x из которой $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0)$, т.е. $f(x)$ для x из окрестности x_0 имеет такой же знак, как и число $f(x_0)$.

4. *Теорема о непрерывности композиции.* Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $x = g(t)$ непрерывна в точке t_0 такой, что $x_0 = g(t_0)$, то в некоторой окрестности точки t_0 определена композиция $f \circ g$ (т.е. $y = f(g(t))$) и она непрерывна в точке t_0 .

5. *Критерий непрерывности монотонной функции.* Для того чтобы монотонная функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ была непрерывна на отрезке $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы множество значений этой функции было отрезком.

6. *Теорема о непрерывности обратной функции.* Если функция f строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она обратима, причем обратная функция также строго монотонна (в том смысле, что и f) и непрерывна на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$.

Заметим также, что если функция f определена, строго монотонна и непрерывна на интервале $(a; b)$ и существуют конечные или бесконечные пределы $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = c$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = d$, то она обратима, причем обратная функция строго монотонна и непрерывна на интервале с концами c и d . (При этом a и b могут быть бесконечны. Если $a = -\infty$, то под значением c по-

нимают предел $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, а если $b = +\infty$, то $d = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.)

7. *Непрерывность элементарных функций.* Отмеченные выше определения и свойства позволяют установить, что основные элементарные функции непрерывны на множестве своего задания.

Пример 6.10. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{\ln(x - 1)}, & \text{если } x > 1, \ x \neq 2, \\ a, & \text{если } x = 2. \end{cases}$$

Решение. Функция определена на интервале $(1; +\infty)$. Так как функции $x^2 - 4$ и $\ln(x - 1)$ непрерывны для $x \in (1; +\infty)$, то и их частное непрерывно, если знаменатель отличен от нуля, т.е. функция $y = \frac{x^2 - 4}{\ln(x - 1)}$ непрерывна для $x > 1, \ x \neq 2$. Исследуем точку $x = 2$. Найдем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\ln(x - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\ln(1 + (x - 2))} = [\ln(1 + t) \sim t, \ t \rightarrow 0] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4. \end{aligned}$$

Следовательно, если $a = 4$, то $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 = f(2)$ и функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 2$. Если же $a \neq 4$, то точка $x = 2$ является *точкой устранимого разрыва* для $f(x)$.

Пример 6.11. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1/(x + 1)^2, & \text{если } x > -1, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x + 1}, & \text{если } x < -1, \\ -\pi/2, & \text{если } x = -1. \end{cases}$$

Решение. Функции $\frac{1}{(x + 1)^2}$ и $\operatorname{arctg} \frac{1}{x + 1}$ непрерывны на промежутках $(-1; +\infty)$ и $(-\infty; -1)$ соответственно как композиции непрерывных функций. Разрыв может быть только в точке $x = -1$. Исследуем эту точку:

$$f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty,$$

$$f(-1-0) = \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} = -\frac{\pi}{2}, \quad f(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Поскольку односторонние пределы $f(-1+0)$ и $f(-1-0)$ существуют и один из них бесконечен, то точка $x = -1$ есть точка бесконечного скачка. Заметим, что поскольку $f(-1-0) =$

$f(-1)$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = -1$ слева. График функции $f(x)$ имеет следующий вид (рис. 39).

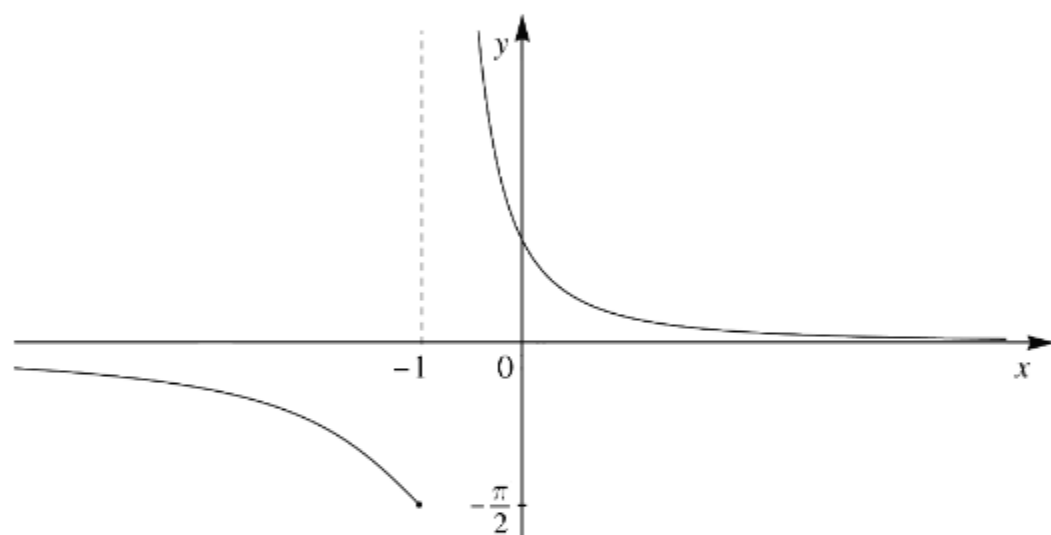


Рис. 39

Пример 6.12. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = |x|$.

Решение. Так как $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$ то на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция непрерывна. Непрерывность функции в точке $x = 0$ доказана в примере 6.9. Таким образом, функция $f(x) = |x|$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Пример 6.13. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \left| \frac{\sin x}{x} \right|, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Решение. Функция $\frac{\sin x}{x}$ непрерывна на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ как частное двух непрерывных функций со знаменателем, отличным от нуля. На этих же промежутках будет непрерывной и функция $\left| \frac{\sin x}{x} \right|$ как композиция двух непрерывных функций — функции $\frac{\sin x}{x}$ и функции модуль. Исследуем точку $x = 0$. Так как $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \left[\text{в силу непрерывности функции модуль можно перейти к пределу под знаком модуля} \right] = \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right| = 1$ и $f(0) = 1$, то функция $f(x) = \left| \frac{\sin x}{x} \right|$ непрерывна и в точке $x = 0$. Таким образом, эта функция непрерывна на $\mathbb{R}$.

Пример 6.14. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = (x - 3) \cdot 1(x^2 - x - 6).$$

Решение. Исходя из определения функции Хевисайда

$$1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

получим следующее представление:

$$\begin{aligned} 1(x^2 - x - 6) &= 1((x + 2)(x - 3)) = \\ &= \begin{cases} 1, & \text{если } (x + 2)(x - 3) \geq 0, \\ 0, & \text{если } (x + 2)(x - 3) < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty), \\ 0, & \text{если } x \in (-2; 3). \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, функция $1(x^2 - x - 6)$ будет непрерывной на интервалах $(-\infty; 2)$, $(2; 3)$, $(3; +\infty)$. А значит, на этих интервалах будет непрерывной и функция $f(x) = (x - 3) \cdot 1(x^2 - x - 6)$ как произведение непрерывных функций. Остается исследовать точки $x = -2$ и $x = 3$.

$$x = -2:$$

$$f(-2 - 0) = \lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} (x - 3) \cdot 1(x^2 - x - 6) = -5,$$

$$f(-2+0) = \lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} (x-3) \cdot 1(x^2 - x - 6) = 0,$$

$$f(-2) = -5.$$

Следовательно, точка $x = -2$ является точкой разрыва функции $f(x)$, а именно точкой конечного скачка.

$x = 3$:

$$f(3-0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (x-3) \cdot 1(x^2 - x - 6) = 0$$

как произведение бесконечно малой функции на ограниченную. По той же причине и

$$f(3+0) = \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} (x-3) \cdot 1(x^2 - x - 6) = 0.$$

Учитывая, что и $f(3) = 0$, заключаем, что в точке $x = 3$ функция непрерывна.

Следовательно, функция $f(x) \in C(\mathbb{R} \setminus \{-2\})$, а точка $x = -2$ является точкой конечного скачка функции f .

Пример 6.15. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Решение. Функция f определена на $\mathbb{R}$. Во всех точках, кроме $x = 0$, функция непрерывна как элементарная. В точке $x = 0$ вычислим предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

как произведение бесконечно малой функции на ограниченную. Поскольку $f(0) = 0$, то функция f непрерывна в точке $x = 0$. Таким образом, $f \in C(\mathbb{R})$.

Пример 6.16. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{1/(x-1)}}, & \text{если } x \neq 1, \\ 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Решение. Функция непрерывна в каждой точке, где $x \neq 1$, как арифметическая комбинация и композиция непрерывных функций. Исследуем точку $x = 1$:

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{1 + e^{1/(x-1)}} = 0$$

[в силу того что $x \rightarrow 1+0 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{1/(x-1)} \rightarrow +\infty$],

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1$$

[в силу того что $x \rightarrow 1-0 \Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{1/(x-1)} \rightarrow 0$].

Следовательно, точка $x = 1$ является точкой конечного скачка.

Пример 6.17. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ a, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Решение. Для $x \neq 0$ функция f непрерывна как произведение непрерывных функций. Так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x^2 = 0,$$

то при $a = 0$ функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, а при $a \neq 0$ точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва.

Пример 6.18. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}.$$

Решение. Выражение под знаком предела определено для всех $x \in \mathbb{R}$.

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, если $|q| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0$, если $|x| < 1$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = +\infty$, если $|x| > 1$. Это позволяет записать функцию f в следующем виде:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| < 1, \\ 1, & \text{если } |x| > 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = -1 \text{ и } x = 1. \end{cases}$$

Следовательно, функция непрерывна на $\mathbb{R}$, за исключением точек $x = -1$, $x = 1$, которые для нее являются точками конечного скачка.

Пример 6.19. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2}x, & \text{если } |x| \leq 1, \\ |x - 1|, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

Решение. Функция непрерывна на интервалах $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$ как композиция непрерывных функций. Разрывы возможны лишь в точках $x = -1$ и $x = 1$. Исследуем эти точки.

$x = -1$:

$$f(-1 - 0) = \lim_{x \rightarrow -1 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1 - 0} |x - 1| = 2,$$

$$f(-1 + 0) = \lim_{x \rightarrow -1 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1 + 0} \cos \frac{\pi}{2}x = 0,$$

$$f(-1) = 0.$$

Таким образом, $f(-1-0)$ и $f(-1+0)$ конечны и $f(-1-0) \neq f(-1+0)$, т.е. точка $x = -1$ является точкой конечного скачка.

$x = 1$:

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \cos \frac{\pi}{2} x = 0,$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} |x-1| = 0,$$

$$f(1) = 0.$$

Поэтому точка $x = 1$ является точкой непрерывности функции f .

Пример 6.20. Доопределить функцию

$$f(x) = \frac{e^{-x^2} - 1}{x \ln(1-x)}$$

в точке $x = 0$ так, чтобы она была непрерывной в этой точке.

Решение. Для непрерывности функции f в точке $x = 0$ должно выполняться равенство $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Найдем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{x \ln(1-x)} = \left[e^t - 1 \sim t, \ln(1+t) \sim t \text{ при } t \rightarrow 0 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x(-x)} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, при $f(0) = 1$ функция будет непрерывной в точке $x = 0$.

Пример 6.21. Исследовать на непрерывность композиции $f \circ g$ и $g \circ f$, если $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1 + x^2$.

Решение. Составим композицию $f \circ g$: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \operatorname{sgn}(1 + x^2) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, и, следовательно, композиция $f \circ g$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 + (\operatorname{sgn} x)^2 = \begin{cases} 2, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Поскольку $(g \circ f)(-0) = (g \circ f)(+0) = 2$, $(g \circ f)(0) = 1$, то точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва для $g \circ f$. В остальных точках функция $g \circ f$ непрерывна.

Пример 6.22. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + x^2 e^{nx}}.$$

Решение. Заметим, что выражение под знаком предела имеет смысл на $\mathbb{R}$. В силу того что $e^{nx} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если $x < 0$, и $e^{nx} \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, если $x > 0$, получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + x^2 e^{nx}} = \begin{cases} x, & \text{если } x < 0, \\ 1/x^2, & \text{если } x > 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Так как $f(+0) = +\infty$, $f(-0) = 0$, $f(0) = 1$, то точка $x = 0$ является точкой бесконечного скачка. Во всех остальных точках из $\mathbb{R}$ функция непрерывна.

Пример 6.23. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & \text{если } x < 0, \\ 3x - \frac{1}{2}, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2 + 1(x^2 - 2x)}, & \text{если } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение. Возможными точками разрыва являются концевые точки промежутков, на которых функция задана разными формулами, и точки разрыва функции Хевисайда, т. е. точки $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$. В остальных точках функция непрерывна на основании соответствующих теорем. Изучим выделенные точки.

$x = 0$:

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2},$$

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \left(3x - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2},$$

$$f(0) = -1/2.$$

Полученные результаты означают, что функция непрерывна в точке $x = 0$.

$$x = 1/2:$$

$$f\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2} - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2} - 0} \left(3x - \frac{1}{2} \right) = 1,$$

$$f\left(\frac{1}{2} + 0\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2} + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2} + 0} \left(\frac{1}{2 + 1(x^2 - 2x)} \right) = \frac{1}{2},$$

$$f(1/2) = 1.$$

Таким образом, точка $x = 1/2$ является точкой конечного скачка.

$$x = 2:$$

$$f(2 - 0) = \lim_{x \rightarrow 2 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2 - 0} \frac{1}{2 + 1(x^2 - 2x)} = \frac{1}{2},$$

$$f(2 + 0) = \lim_{x \rightarrow 2 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2 + 0} \frac{1}{2 + 1(x^2 - 2x)} = \frac{1}{3},$$

$$f(2) = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, точка $x = 2$ — точка конечного скачка.

Пример 6.24. Найти a и b (если они существуют), при которых функция

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & \text{если } x \leq 0, \\ ax + b, & \text{если } 0 < x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x \geq 1, \end{cases}$$

непрерывна на множестве своего задания.

Решение. Функция задана на $\mathbb{R}$ и непрерывна на множествах $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$ на основании теорем о непрерывности арифметических комбинаций и композиции непрерывных

функций. Осталось исследовать точки $x = 1$ и $x = 0$. Рассмотрим эти точки.

$x = 1$:

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (ax + b) = a + b,$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \sqrt{x} = 1,$$

$$f(1) = 1.$$

Для непрерывности функции f в точке $x = 1$ должны выполняться условия $f(1-0) = f(1+0) = f(1)$, откуда следует, что $a + b = 1$.

$x = 0$:

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} (x - 1)^3 = -1,$$

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} (ax + b) = b,$$

$$f(0) = -1.$$

Чтобы функция была непрерывна в точке 0, нужно потребовать

$$f(-0) = f(+0) = f(0),$$

что приводит к условию $b = -1$. Таким образом, функция непрерывна в точках $x = 0$ и $x = 1$ при

$$\begin{cases} b = -1, \\ a + b = 1, \end{cases} \Rightarrow a = 2, \quad b = -1.$$

Пример 6.25. При каком значении a функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} 2x}{x^3}, & \text{если } x \neq 0, \\ a, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

непрерывна на $\mathbb{R}$?

Решение. Должно выполняться условие $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.
Найдем

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sh} x - 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sh} x (1 - \operatorname{ch} x)}{x^3} = \left[\operatorname{sh} x \sim x, \quad 1 - \operatorname{ch} x \sim -\frac{x^2}{2} \text{ при } x \rightarrow 0 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x \cdot x^2}{2x^3} = -1.\end{aligned}$$

Следовательно, $a = -1$.

Пример 6.26. Исследовать на непрерывность композиции $f \circ g$ и $g \circ f$, если $f(x) = x + \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1(x + 1)$.

Решение. Рассмотрим композицию $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1(x + 1) + \operatorname{sgn}(1(x + 1)).$$

Используя определения функции Хевисайда и функции сигнум, запишем выражение для $(f \circ g)(x)$ в другой форме. Так как

$$1(x + 1) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq -1, \\ 0, & \text{если } x < -1, \end{cases}$$

то

$$\operatorname{sgn}(1(x + 1)) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq -1, \\ 0, & \text{если } x < -1, \end{cases}$$

и, следовательно,

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \geq -1, \\ 0, & \text{если } x < -1. \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что точка $x = -1$ является точкой конечного скачка для $f \circ g$, а в остальных точках композиция непрерывна.

Рассмотрим теперь композицию $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = 1(1 + x + \operatorname{sgn} x) = \begin{cases} 1(2 + x), & \text{если } x > 0, \\ 1(1 + x), & \text{если } x = 0, \\ 1(x), & \text{если } x < 0, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases} = 1(x).$$

Следовательно, композиция $g \circ f$ непрерывна на $\mathbb{R}$, за исключением точки $x = 0$, которая для нее является точкой конечного скачка.

Пример 6.27. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|\sin x|}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Решение. Функция $|\sin x|$ непрерывна на $\mathbb{R}$ как композиция непрерывных функций, а $\frac{|\sin x|}{x}$ непрерывна как частное непрерывных функций, если знаменатель отличен от нуля. Таким образом, функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Исследуем точку $x = 0$:

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-\sin x}{x} = -1,$$

$$f(0) = 1.$$

Следовательно, функция $f(x)$ разрывна в точке $x = 0$, которая является точкой конечного скачка.

Пример 6.28. Исследовать на непрерывность и установить характер точек разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+3), & \text{если } |x| < 3, \\ 3x-2, & \text{если } |x| \geq 3. \end{cases}$$

Решение. Функция определена на $\mathbb{R}$. На промежутках $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$, $(3; +\infty)$ функция непрерывна, разрывы возможны лишь в точках $x = -3$ и $x = 3$. Исследуем эти точки.

$x = -3$:

$$f(-3-0) = \lim_{x \rightarrow -3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3-0} (3x - 2) = -11,$$

$$f(-3+0) = \lim_{x \rightarrow -3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3+0} \ln(x+3) = -\infty,$$

$$f(-3) = -11.$$

Полученные значения пределов позволяют заключить, что точка $x = -3$ является точкой бесконечного скачка для функции $f(x)$.

$x = 3$:

$$f(3-0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \ln(x+3) = \ln 6,$$

$$f(3+0) = \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} (3x - 2) = 7,$$

$$f(3) = 7.$$

Следовательно, точка $x = 3$ является точкой конечного скачка.

Пример 6.29. Как следует доопределить функцию

$$f(x) = \left(\frac{x + 2^x}{x + 3^x} \right)^{1/x}$$

в точке $x = 0$, чтобы она была непрерывной в этой точке?

Решение. Для непрерывности функции f в точке $x = 0$ должно быть выполнено условие $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Найдем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + 2^x}{x + 3^x} \right)^{1/x} = \left[\text{неопределенность вида } 1^\infty \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2^x - 3^x}{x + 3^x} \right)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2^x - 3^x}{x(x + 3^x)}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x(x + 3^x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x(1 - (3/2)^x)}{x(x + 3^x)}} = \\ &= \left[\text{при } x \rightarrow 0 \text{ выполнено: } a^x - 1 \sim x \ln a, \quad x + 3^x \sim 1, \quad 2^x \sim 1 \right] = \end{aligned}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \ln(3/2)}{x}} = e^{-\ln(3/2)} = e^{\ln(2/3)} = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, если $f(0) = 2/3$, то функция f непрерывна в точке $x = 0$.

Пример 6.30. При каких значениях α и β функция

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & \text{если } x \in [-2; 3), \\ \alpha x + \beta, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus [-2; 3), \end{cases}$$

непрерывна на $\mathbb{R}$?

Решение. Функция f непрерывна на интервалах $(-\infty; -2)$, $(-2; 3)$, $(3; +\infty)$. Для того чтобы f была непрерывна на $\mathbb{R}$, она должна быть непрерывна и в точках $x = -2$ и $x = 3$. А для этого нужно потребовать выполнения равенств

$$f(-2 - 0) = f(-2 + 0) = f(-2) \quad \text{и} \quad f(3 - 0) = f(3 + 0) = f(3).$$

Вычислим требуемые значения:

$$f(-2 - 0) = \lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-0} (\alpha x + \beta) = -2\alpha + \beta,$$

$$f(-2 + 0) = \lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+0} (2x - x^2) = -8,$$

$$f(-2) = (2x - x^2) \Big|_{x=-2} = -8;$$

$$f(3 - 0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (2x - x^2) = -3,$$

$$f(3 + 0) = \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} (\alpha x + \beta) = 3\alpha + \beta,$$

$$f(3) = (\alpha x + \beta) \Big|_{x=3} = 3\alpha + \beta.$$

Таким образом, получим систему

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta = -8, \\ 3\alpha + \beta = -3, \end{cases}$$

откуда $\alpha = 1$, $\beta = -6$.

Пример 6.31. Можно ли доопределить функцию

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{x} - 1)}{x - 1}$$

в точке $x = 1$ так, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

Решение. Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2},$$

то при $f(1) = 1/2$ функция $f(x)$ будет непрерывна в точке $x = 1$.

Задачи для индивидуальных и контрольных заданий

6.1. Найти точки разрыва функции $f(x)$ и указать их характер.

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} 1 + \sin 2x, & \text{если } x \geq 0, \\ x^2 + 3x - 1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

(Ответ: 0 — точка конечного скачка).

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{если } x < 0, \\ (x+1)^2, & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ 1 - \ln(x-1), & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

(Ответ: 0; 2 — точки конечного скачка).

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + 5x - 6|}{x^2 + 5x - 6}, & \text{если } x \neq -6 \text{ и } x \neq 1, \\ 1, & \text{если } x = -6 \text{ или } x = 1. \end{cases}$$

(Ответ: -6; 1 — точки конечного скачка).

$$4. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2}, & \text{если } x < 1, \\ \frac{3x-2}{x^2 + \sin x}, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

(Ответ: 1 точка бесконечного скачка).

$$5. f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & \text{если } x < 0, \\ 1 + x + \ln(x + e^{-1}), & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{2x-3}{2x^2 + x - 3}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

(Ответ: 1 точка бесконечного скачка).

$$6. f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1+x^3}, & \text{если } x < -1, \\ 1/3, & \text{если } x = -1, \\ \frac{2}{1+2^{x+1}}, & \text{если } x > -1. \end{cases}$$

(Ответ: -1 точка конечного скачка).

$$7. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x-2}, & \text{если } x < 2, \\ \frac{x+2}{x+3}, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

(Ответ: 2 точка неопределенности).

$$8. f(x) = \begin{cases} \frac{x \operatorname{sh} 2x}{\ln(1+x^2)}, & \text{если } x < 0, \\ \frac{2^x + 2^{-x}}{1 + 2x + x^2}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

(Ответ: точек разрыва нет).

$$9. f(x) = \begin{cases} (x-1) \sin \frac{\pi}{x+1}, & \text{если } x < -1, \\ \frac{x+2}{(x+1)^2}, & \text{если } x > -1, \\ 0, & \text{если } x = -1. \end{cases}$$

(Ответ: -1 точка неопределенности).

$$10. \quad f(x) = \begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right), & \text{если } x \leq -\frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x, & \text{если } -\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ \sin x + \cos x, & \text{если } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

(Ответ: $-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}$ точки конечного скачка).

$$11. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \sin x}, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ \frac{1}{3x^2 + 1}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

(Ответ: 1 точка конечного скачка).

$$12. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{|\operatorname{arctg} 2x|}{\operatorname{arctg}(2|x|)}, & \text{если } x \neq 0, \\ -1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

(Ответ: 0 точка устранимого разрыва).

$$13. \quad f(x) = \begin{cases} x \operatorname{ctg} x, & \text{если } x \neq 0, \quad |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 2, & \text{если } x = 0, \\ 2x + \pi, & \text{если } |x| \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(Ответ: 0 точка устранимого разрыва,
 $\frac{\pi}{2}$ точка конечного скачка).

$$14. \quad f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}, \\ 1 + \sqrt{2}, & \text{если } x = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} 2x, & \text{если } \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(Ответ: $\frac{\pi}{4}$ точка бесконечного скачка).

$$15. f(x) = \begin{cases} x \ln x^2, & \text{если } x < 0, \\ \frac{\operatorname{sh} x}{2 + \operatorname{ch} x}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \operatorname{ch} \frac{1}{x-1}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

(Ответ: 1 точка бесконечного скачка).

$$16. f(x) = \begin{cases} \sin x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x < 0, \\ x \ln(2+x), & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{2x+1}{\operatorname{arctg}(x-1)}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

(Ответ: 1 точка бесконечного скачка).

$$17. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln |x|}, & \text{если } -1 < x < 0, \\ 1(x-1), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ \arcsin \frac{1}{x}, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

(Ответ: 1 точка конечного скачка).

$$18. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{если } |x| \leq 1, \\ 1-x^2, & \text{если } x > 1, \\ \frac{1}{1-x^2}, & \text{если } x < -1. \end{cases}$$

(Ответ: -1 точка бесконечного скачка).

$$19. f(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{2x^2+x-1}, & \text{если } x < -1, \\ -x^2-x+2, & \text{если } -1 \leq x \leq \pi, \\ (x+\pi) \sin \frac{1}{x-\pi}, & \text{если } x > \pi. \end{cases}$$

(Ответ: -1 точка бесконечного скачка,
 π точка неопределенности).

$$20. f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{если } x \leq 0, \\ x - 2, & \text{если } 0 < x < 3, \\ \operatorname{ch} \frac{x-3}{x+3}, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

(Ответ: точек разрыва нет).

$$21. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln \frac{x+1}{x-1}, & \text{если } |x| > 1, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|-1}, & \text{если } |x| < 1, \\ \pi/2, & \text{если } x = -1, x = 1. \end{cases}$$

(Ответ: $-1; 1$ — точки бесконечного скачка).

$$22. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(1+2x)}, & \text{если } -1/2 < x < 0, \\ (1+2x)^{-1}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1/2, \\ (1-2x)^{-1}, & \text{если } x > 1/2. \end{cases}$$

(Ответ: 0 — точка конечного скачка,
 $1/2$ — точка бесконечного скачка).

$$23. f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{ch} x, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{2}{1 + \operatorname{sh} x}, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ \frac{3}{x^2 - 3x + 2}, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

(Ответ: 2 — точка бесконечного скачка).

$$24. f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x+2}, & \text{если } x < -2, \\ \sin \frac{1}{x+3}, & \text{если } -2 \leq x < 1, \\ 3x^2 + 4x + 1, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

(Ответ: -2 — точка бесконечного скачка,
 1 — точка конечного скачка).

$$25. f(x) = \begin{cases} \frac{2^x - 1}{x}, & \text{если } x < 0, \\ \ln(2x^2 + 5x + 2), & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

(Ответ: 1 точка конечного скачка).

$$26. f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) \cos \frac{1}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \frac{x}{x^2 + 1}, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

(Ответ: точек разрыва нет).

$$27. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 1(x)}, & \text{если } x \geq -1, \\ \frac{|x|}{\sin \frac{\pi}{2x}}, & \text{если } x < -1. \end{cases}$$

(Ответ: -1; 0 точки конечного скачка).

$$28. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & \text{если } x > 2, \\ \operatorname{sgn}(x+3), & \text{если } x \leq 2. \end{cases}$$

(Ответ: -3 точка конечного скачка,
2 точка бесконечного скачка).

$$29. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - \pi^2}, & \text{если } x \geq 2\pi, \\ \cos \frac{x}{4}, & \text{если } -2\pi \leq x \leq 2\pi, \\ 2x + 4\pi, & \text{если } x < -2\pi. \end{cases}$$

(Ответ: 2π точка конечного скачка).

$$30. f(x) = \begin{cases} \frac{3x+2}{2x-3}, & \text{если } x > \frac{3}{2}, \\ x+1, & \text{если } -2 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 1(x)-1, & \text{если } x < -2. \end{cases}$$

(Ответ: $\frac{3}{2}$ точка бесконечного скачка).

6.2. Исследовать на непрерывность функции.

1. $f(x) = 1(2x+1) - \operatorname{sgn}(2-x)$.
(Ответ: $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{-1/2; 2\})$, $-1/2; 2$ точки конечного скачка).
2. $f(x) = 1(3x-6) - 1(3x+6)$.
(Ответ: $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\})$, $-2; 2$ точки конечного скачка).
3. $f(x) = 1(x^2 - 5x + 6) - \operatorname{sgn}(x^2 - 3x + 2)$.
(Ответ: $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{1; 2; 3\})$, $1; 2; 3$ точки конечного скачка).
4. $f(x) = 1(x^2 - 16) - 1(x+4)$.
(Ответ: $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{-4; 4\})$, $-4; 4$ точки конечного скачка).
5. $f(x) = 1(x^2 - x - 6) - 1(x+2)$.
(Ответ: $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{-2; 3\})$, $-2; 3$ точки конечного скачка).
6. $f(x) = 1(3x^2 - 11x - 4) - 1(x-4)$.
(Ответ: $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{-1/3\})$, $-1/3$ точка конечного скачка).
7. $f(x) = \operatorname{sgn}(-x^2 + x + 2) + \operatorname{sgn}(x^2 - 2x)$.
(Ответ: $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\})$, $-1; 0$ точки конечного скачка).
8. $f(x) = 1(1 - x^2) + \operatorname{sgn}(5x+5)$.
(Ответ: $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\})$, $-1; 1$ точки конечного скачка).

$$9. f(x) = 1(x-1) + \operatorname{sgn}(\sqrt{x}-1).$$

(Ответ: $f \in C([0; 1) \cup (1; +\infty))$, 1 точка конечного скачка).

$$10. f(x) = 1(x^3 - 3x^2 + 4) - 1(x-2) - 1(x+1).$$

(Ответ: $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{2\})$, 2 точки конечного скачка).

$$11. f(x) = \operatorname{sgn}(x-1) + 1(2-x-x^2).$$

(Ответ: $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\})$, -2; 1 точки конечного скачка).

$$12. f(x) = 1\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) + \operatorname{sgn}\left(\frac{x-1}{x^2+4}\right).$$

(Ответ: $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{1\})$, 1 точка конечного скачка).

$$13. f(x) = 1(2x-3) + 1(3-2x).$$

(Ответ: $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{3/2\})$, 3/2 точка устранимого разрыва).

$$14. f(x) = 1(2x^2 + x - 1) - \operatorname{sgn}(x+1).$$

(Ответ: $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{-1; 1/2\})$, -1; 1/2 точки конечного скачка).

$$15. f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x) - 1(2x).$$

(Ответ: $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\})$, πk точки конечного скачка).

$$16. f(x) = 1(x) \operatorname{sgn}(x^2 + 2x - 15).$$

(Ответ: $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{0; 3\})$, 0; 3 точки конечного скачка).

6.3. При каком значении $f(x_0)$ функция $f(x)$ будет непрерывной в точке x_0 ?

$$1. f(x) = \sin x \operatorname{ctg} 4x, \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } f(0) = \frac{1}{4}).$$

$$2. f(x) = \frac{\arcsin 2x}{\ln(1+x)}, \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } f(0) = 2).$$

3. $f(x) = \frac{3^{\operatorname{sh} x} - 1}{\operatorname{tg} x}, \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } f(0) = \ln 3).$
4. $f(x) = \frac{\log_2(1 + 2x)}{\operatorname{arctg} x}, \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } f(0) = 2/\ln 2).$
5. $f(x) = (x - 1) \ln(x - 1)^2, \quad x_0 = 1. \quad (\text{Ответ: } f(1) = 0).$
6. $f(x) = \sin(x^2 + 2x) \sin \frac{1}{x^2 + x}, \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } f(0) = 0).$
7. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 4x}{(1 + x)^8 - 1}, \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } f(0) = \frac{1}{2}).$
8. $f(x) = \operatorname{sh} 2x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } f(0) = 0).$
9. $f(x) = \frac{\lg x - 1}{\ln(x - 9)}, \quad x_0 = 10. \quad (\text{Ответ: } f(10) = \frac{1}{10 \ln 10}).$
10. $f(x) = \frac{2^x - x^2}{x - 2}, \quad x_0 = 2. \quad (\text{Ответ: } f(2) = 4 \ln 2 - 4).$
11. $f(x) = \frac{\cos 3x - \cos 7x}{e^{x^2} - 1}, \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } f(0) = 20).$
12. $f(x) = \frac{\sqrt[5]{32 + x} - 2}{\operatorname{sh} 5x}, \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } f(0) = \frac{1}{400}).$
13. $f(x) = \frac{\sqrt{x + 11} - 2\sqrt{x - 1}}{x^2 - 25}, \quad x_0 = 5. \quad (\text{Ответ: } f(0) = -\frac{3}{80}).$
14. $f(x) = \frac{\sqrt[6]{1 + \sin x} - 1}{\ln(1 + 2x)}, \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } f(0) = \frac{1}{12}).$
15. $f(x) = \frac{\operatorname{sh}^2 2x}{\operatorname{arctg}(x + x^2)^2}, \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } f(0) = 4).$
16. $f(x) = \frac{e^{\operatorname{arcsin} 2x^2} - 1}{1 - \cos 6x}, \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } f(0) = \frac{1}{9}).$

6.4. Исследовать на непрерывность композиции $f \circ g$ и $g \circ f$.

1. $f(x) = \operatorname{sgn}(x - 1)$, $g(x) = x^2 + x + 1$.

(Ответ: $f \circ g \in C(\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\})$,

$-1; 0$ точки конечного скачка;

$g \circ f \in C(\mathbb{R} \setminus \{1\})$, 1 точка конечного скачка).

2. $f(x) = 1(2x + 3)$, $g(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$.

(Ответ: $f \circ g \in C(\mathbb{R})$;

$g \circ f \in C(\mathbb{R} \setminus \{-3/2\})$, $-3/2$ точка конечного скачка).

3. $f(x) = \operatorname{sgn}(x - 1)$, $g(x) = \operatorname{sgn}(x + 1)$.

(Ответ: $f \circ g \in C(\mathbb{R} \setminus \{-1\})$, -1 точка конечного скачка;

$g \circ f \in C(\mathbb{R} \setminus \{1\})$, 1 точка конечного скачка).

4. $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = 1(x + 2)$.

(Ответ: $f \circ g \in C(\mathbb{R} \setminus \{-2\})$, -2 точка конечного скачка;

$g \circ f \in C(\mathbb{R} \setminus \{-2; -1\})$, $-2; -1$ точки конечного скачка).

5. $f(x) = |x|$, $g(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 2x - 3)$.

(Ответ: $f \circ g \in C(\mathbb{R} \setminus \{-1; 3\})$,

$-1; 3$ точки устранимого разрыва;

$g \circ f \in C(\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\})$, $-3; 3$ точки конечного скачка).

6. $f(x) = \sqrt{x + 2}$, $g(x) = 1(x - \sqrt{5})$.

(Ответ: $f \circ g \in C(\mathbb{R} \setminus \{\sqrt{5}\})$, $\sqrt{5}$ точка конечного скачка;

$g \circ f \in C([-2; 3] \cup (3; +\infty))$, 3 точка конечного скачка).

7. $f(x) = 4 + 3\operatorname{sgn} 4x$, $g(x) = 1(x - 2)$.

(Ответ: $f \circ g \in C(\mathbb{R} \setminus \{2\})$, 2 точка конечного скачка;

$g \circ f \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, 0 точка конечного скачка).

$$8. f(x) = x^2 + |x|, \quad g(x) = \operatorname{sgn} 7x.$$

(Ответ: $f \circ g \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, 0 точка устранимого разрыва;
 $g \circ f \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, 0 точка устранимого разрыва).

$$9. f(x) = 1(x - 5), \quad g(x) = x^2 + 4.$$

(Ответ: $f \circ g \in C(\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\})$,

-1; 1 точки конечного скачка;

$g \circ f \in C(\mathbb{R} \setminus \{5\})$, 5 точка конечного скачка).

$$10. f(x) = \cos 2x, \quad g(x) = \operatorname{sgn} 2x.$$

(Ответ: $f \circ g \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, 0 точка устранимого разрыва;

$g \circ f \in C\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ точки
 конечного скачка).

$$11. f(x) = 1(x + 2), \quad g(x) = \frac{1 + 2x}{1 + x^2}.$$

(Ответ: $f \circ g \in C(\mathbb{R})$;

$g \circ f \in C(\mathbb{R} \setminus \{-2\})$, -2 точка конечного скачка).

$$12. f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 2x - 8), \quad g(x) = 1(-x).$$

(Ответ: $f \circ g \in C(\mathbb{R})$;

$g \circ f \in C(\mathbb{R} \setminus \{-2; 4\})$, -2; 4 точки конечного скачка).

$$13. f(x) = 1(4x + 2), \quad g(x) = |x + 1| + 1.$$

(Ответ: $f \circ g \in C(\mathbb{R})$;

$g \circ f \in C(\mathbb{R} \setminus \{-1/2\})$, -1/2 точка конечного скачка).

$$14. f(x) = 1(1 - x), \quad g(x) = 1 - 1(x).$$

(Ответ: $f \circ g \in C(\mathbb{R})$; $g \circ f \in C(\mathbb{R})$).

$$15. f(x) = \frac{|x|}{|x| + 1}, \quad g(x) = 1 - \operatorname{sgn} x.$$

(Ответ: $f \circ g \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, 0 точка конечного скачка;

$g \circ f \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, 0 точка устранимого разрыва).

$$16. f(x) = \operatorname{sgn}(x + 4), \quad g(x) = 1(x - 4).$$

(Ответ: $f \circ g \in C(\mathbb{R})$; $g \circ f \in C(\mathbb{R})$).

6.5. Доказать непрерывность (по ε найти δ_ε) функции f в точке x_0 .

$$1. f(x) = 2x + 5, \quad x_0 = 4.$$

$$2. f(x) = 2x^2 + 1, \quad x_0 = 1.$$

$$3. f(x) = \sin 2x, \quad x_0 = \pi/8.$$

$$4. f(x) = \cos 3x, \quad x_0 = \pi/9.$$

$$5. f(x) = \frac{2x + 1}{3x - 2}, \quad x_0 = 0.$$

$$6. f(x) = x^2 + 4x + 7, \quad x_0 = -2.$$

$$7. f(x) = \sqrt{3x + 7}, \quad x_0 = 3.$$

$$8. f(x) = \frac{2x + 1}{x^2}, \quad x_0 = -1.$$

$$9. f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 9.$$

$$10. f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = 2.$$

$$11. f(x) = |3x + 1|, \quad x_0 = -2.$$

$$12. f(x) = \frac{x - 3}{x^2 + 2x - 4}, \quad x_0 = 1.$$

$$13. f(x) = \sin(4x + 1), \quad x_0 = \pi/3.$$

$$14. f(x) = \sqrt{2x + 1}, \quad x_0 = 4.$$

$$15. f(x) = \frac{x^2 + x}{3x + 2}, \quad x_0 = 0.$$

$$16. f(x) = x + \sin x, \quad x_0 = \pi.$$

6.6. При каких значениях параметров a и b функция $f(x)$ будет непрерывной на множестве задания?

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ x^2 + ax + b, & |x| > 1. \end{cases}$$

(Ответ: $a = 1, b = -1$).

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x^2-1}, & |x| \neq 1, \\ a, & x = -1, \\ b, & x = 1. \end{cases}$$

(Ответ: нет таких a и b).

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right], \quad x \neq 0, \quad x \neq \pi, \\ a, & x = 0, \\ b, & x = \pi. \end{cases}$$

(Ответ: $a = 1, b = \pi/2$).

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 0, \\ x + a, & x > 0. \end{cases}$$

(Ответ: $a = 2$).

$$5. \quad f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x < -1, \\ ax + b, & -1 \leq x < 0, \\ 5x - x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

(Ответ: $a = -1, b = 0$).

$$6. \quad f(x) = \begin{cases} a - x^3, & x < 0, \\ (x-1)^3, & 0 \leq x \leq 2, \\ 3 - bx, & x > 2. \end{cases}$$

(Ответ: $a = -1, b = 1$).

$$7. f(x) = \begin{cases} 2^x + a, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ bx - 1, & 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

(Ответ: $a = -1$, $b = 2$).

$$8. f(x) = \begin{cases} -x + b, & x < 0, \\ ax^3 + 4, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 + 1, & x > 1. \end{cases}$$

(Ответ: $a = -2$, $b = 4$).

6.7. При каком значении параметра a функция $f(x)$ будет непрерывной на $\mathbb{R}$?

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1+x^3}, & x \neq -1, \\ a, & x = -1. \end{cases}$$

(Ответ: $a = 1/3$).

$$2. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ a(x-1), & x > 0. \end{cases}$$

(Ответ: $a = -1$).

$$3. f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1, & x > 1, \\ -x, & x \leq 1. \end{cases}$$

(Ответ: $a = -2$).

$$4. f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x}, & x \neq 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

(Ответ: $a = \mu$).

$$5. f(x) = \begin{cases} \arcsin x \operatorname{ctg} x, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

(Ответ: $a = 1$).

$$6. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(1+3x)}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

(Ответ: $a = 1/3$).

$$7. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^4}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

(Ответ: $a = 0$).

$$8. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x^2}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

(Ответ: $a = -1/2$).

6.8. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$.

$$1. \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}.$$

$$(\text{Ответ: } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| > 1, \\ -1, & |x| < 1, \\ 0, & x = 1, \quad x = -1, \end{cases} \\ x = 1, \quad x = -1 \quad \text{точки конечного скачка}).$$

$$2. \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^{2n+1}}.$$

$$(\text{Ответ: } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1, \\ 1/2, & x = 1, \end{cases} \\ x = 1 \quad \text{точка конечного скачка}).$$

$$3. \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}.$$

$$(\text{Ответ: } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ x^2, & |x| > 1, \end{cases} \quad \text{непрерывна на } \mathbb{R}).$$

$$4. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}.$$

(Ответ: $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x = 0$ — точка конечного скачка).

$$5. f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{xt})}{\ln(1 + e^t)}.$$

(Ответ: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0, \end{cases}$ непрерывна на $\mathbb{R}$).

$$6. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

(Ответ: $f(x) = |x|$ непрерывна на $\mathbb{R}$).

$$7. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n}, \quad x \geq 0.$$

(Ответ: $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x, & x > 1, \end{cases}$ непрерывна на $[0; +\infty)$).

$$8. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1 + x^n}, \quad x \geq 0.$$

(Ответ: $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1/2, & x = 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$

$x = 1$ — точка конечного скачка).

$$9. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{2n}), \quad |x| \leq 1.$$

(Ответ: $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \end{cases}$

$x = 1, x = -1$ — точки устранимого разрыва).

$$10. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2n} x.$$

(Ответ: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z},$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ — точки устранимого разрыва).

ГЛАВА 7. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ

7.1. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — числовая функция, x_0 — внутренняя точка множества $X \subset \mathbb{R}$.

Выражение

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad (x_0 + \Delta x) \in X,$$

называется *приращением функции f в точке x_0 , $\Delta x = x - x_0$ приращением аргумента*.

Функция f называется *дифференцируемой в точке x_0* , если существует число A такое, что выполняется равенство

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x)$ — непрерывная в точке $\Delta x = 0$ функция и $\alpha(0) = 0$.

Из непрерывности $\alpha(\Delta x)$ в точке $\Delta x = 0$ и условия $\alpha(0) = 0$ следует, что $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и, следовательно, $\alpha(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Поэтому условие дифференцируемости функции f в точке x_0 записывают в виде

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

При этом считают, что здесь функция $o(\Delta x)$ равна нулю при $\Delta x = 0$.

Из соотношения

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0,$$

вытекает, что $\Delta f(x_0) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Это означает, что функция f непрерывна в точке x_0 . Таким образом, непрерывность f в точке x_0 является *необходимым* условием дифференцируемости f в точке x_0 .

7.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Если функция f дифференцируема в точке x_0 , то выражение $A\Delta x$ называется *дифференциалом* функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$.

Таким образом, $df(x_0) = A\Delta x$.

Следовательно, для дифференцируемой в точке x_0 функции f имеем

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Это означает, что дифференциал функции представляет собой линейную относительно Δx часть приращения функции.

Пример 7.1. Исследовать дифференцируемость функции $f(x) = C$, где C — постоянная, в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Решение. Так как $f(x_0) = C$ и $f(x_0 + \Delta x) = C$, то $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = C - C = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot |\Delta x|$. Это представление означает, что функция f дифференцируема в любой точке x_0 и $df(x_0) = 0 \cdot \Delta x = 0$.

Пример 7.2. Исследовать дифференцируемость функции $f(x) = x$ в произвольной точке $x \in \mathbb{R}$.

Решение. В точке $x \in \mathbb{R}$ имеем $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x + 0 \cdot |\Delta x|$. Это равенство означает, что функция $f(x) = x$ дифференцируема в любой точке $x \in \mathbb{R}$ и $df(x) = dx = \Delta x$.

В связи с тем что для функции $f(x) = x$ справедливо равенство $dx = \Delta x$, а также для удобства в работе с дифференциалом функции приращение независимой переменной Δx обозначают dx и называют *дифференциалом независимой переменной*.

Тогда дифференциал функции f в точке x запишется в виде

$$df(x) = A dx.$$

Пример 7.3. Исследовать дифференцируемость функции $f(x) = x^2 + 3x + 2$ на $\mathbb{R}$.

Решение. Рассмотрим произвольную точку $x \in \mathbb{R}$. Поскольку $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 2 = x^2 + 3x + 2 + (2x + 3)\Delta x + \Delta x^2$, то $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (2x + 3)\Delta x + \Delta x^2$.

Здесь $A = 2x + 3$, $\Delta x^2 = o(\Delta x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Таким образом, функция $f(x) = x^2 + 3x + 2$ дифференцируема в любой точке $x \in \mathbb{R}$ и $df(x) = (2x + 3) dx$.

Функция f называется *дифференцируемой на множестве X* , если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Следовательно, можно сказать, что рассмотренные функции $f(x) = C$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2 + 3x + 2$ дифференцируемы на $\mathbb{R}$ и их дифференциалы соответственно равны $0 \cdot dx$, dx , $(2x + 3) dx$.

7.3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то он называется *производной функции f в точке x_0* и обозначается одним из символов $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $Df(x_0)$.

Критерий дифференцируемости функции в точке. Для дифференцируемости функции f в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 существовала конечная производная $f'(x_0)$, $f'(x_0) = A$.

Таким образом, если функция f дифференцируема в точке x_0 , то

$$df(x_0) = A dx = f'(x_0) dx.$$

В связи с этим дифференцированием называют как нахождение дифференциалов, так и вычисление производных.

Из последней формулы следует, что выражение $\frac{df(x_0)}{dx}$ представляет собой не только символ производной функции f в точке x_0 , но и отношение дифференциалов.

Замечание. В механике, кроме указанных символов, для обозначения производной по t , где t — время, используют и символ $\dot{x}(t)$.

Пример 7.4. Найти производную функции $f(x) = x^\alpha$ в произвольной точке $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решение. Воспользуемся определением производной:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1 \right)}{\Delta x} = \left[(1+t)^\alpha - 1 \sim \alpha t \text{ при } t \rightarrow 0 \right] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \cdot \alpha \Delta x}{\Delta x \cdot x} = \alpha x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Пример 7.5. Найти производную функции $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Согласно определению производной функции $\forall x \in \mathbb{R}$ получим

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \\ &= \left[\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = [\sin t \sim t, \quad t \rightarrow 0] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x. \end{aligned}$$

Таким образом, $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Аналогично найдем, что $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Пример 7.6. Вычислить производную функции $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Решение. Поскольку

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} =$$

$$= \left[a^t - 1 \sim t \ln a \text{ при } t \rightarrow 0 \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot \Delta x \cdot \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a,$$

то $(a^x)' = a^x \ln a$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $a > 0$. В частности, $(e^x)' = e^x$.

Пример 7.7. Вычислить производную функции $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

Решение. Для любого $x > 0$ имеем

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \left[\ln(1 + t) \sim t, \quad t \rightarrow 0 \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{x \cdot \Delta x} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Следовательно, $(\ln x)' = 1/x$, $x > 0$.

7.4. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

7.4.1. Производные арифметических комбинаций

Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x . Тогда в этой точке дифференцируемы и функции $\alpha f + \beta g$ (α, β — постоянные); $f \cdot g$; $\frac{f}{g}$ ($g(x) \neq 0$). При этом имеют место следующие правила дифференцирования:

1) *производная линейной комбинации*

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x),$$

в частности $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$, $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$;

2) *производная произведения*

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

3) производная частного

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0,$$

в частности

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}.$$

Следствие. При сформулированных выше условиях справедливы правила вычисления дифференциалов:

а) дифференциал линейной комбинации

$$d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg;$$

б) дифференциал произведения

$$d(f \cdot g) = g df + f dg;$$

в) дифференциал частного

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}.$$

Пример 7.8. Найти производную функции $y = \operatorname{tg} x$.

Решение. Поскольку $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, то, используя правило 3), получим

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Аналогичным образом найдем, что

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

7.4.2. Дифференцирование композиции

Если функция f дифференцируема в точке x , а функция g дифференцируема в точке t такой, что $x = g(t)$, то композиция $f \circ g$ дифференцируема в точке t и при этом

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = f'(x) \cdot g'(t).$$

Приведенное правило вычисления производной композиции называется *правилом цепочки*. Оно имеет место для любого конечного числа функций. Например,

$$(f \circ g \circ h)'(x) = f'((g \circ h)(x)) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

При сформулированных выше условиях для дифференциала композиции имеем

$$d((f \circ g)(t)) = f'(g(t)) \cdot g'(t) dt.$$

Из этого соотношения (так как $g'(t) dt = dx$) вытекает *свойство инвариантности формы дифференциала первого порядка*. То есть равенство $df(x) = f'(x) dx$ справедливо и в случае, когда x — независимая переменная, и в случае, когда x — промежуточный аргумент, т. е. является функцией некоторой другой переменной.

Пример 7.9. Вычислить производную функции $y = \operatorname{sh} x$.

Решение. Поскольку $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, то, используя правило цепочки

$$(e^{-x})' = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$$

и производную линейной комбинации, получим

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x.$$

Таким образом, $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $x \in \mathbb{R}$.

Аналогично найдем

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x,$$

т. е. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $x \in \mathbb{R}$.

Пример 7.10. Найти производную функции $y = \operatorname{th} x$.

Решение.

$$\begin{aligned}(\operatorname{th} x)' &= \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \left[\text{производная частного, правило 3)} \right] = \\&= \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Аналогичным образом найдем

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},$$

т. е.

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0.$$

Пример 7.11. Вычислить производную функции $y = 3^{\operatorname{ctg}^3 x}$, $x \neq m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

Решение. Используя правило цепочки, получим

$$\begin{aligned}y' &= (3^{\operatorname{ctg}^3 x})' = [\text{см. пример 7.6}] = 3^{\operatorname{ctg}^3 x} \cdot \ln 3 \cdot (\operatorname{ctg}^3 x)' = \\&= 3^{\operatorname{ctg}^3 x} \cdot \ln 3 \cdot 3 \operatorname{ctg}^2 x (\operatorname{ctg} x)' = 3^{\operatorname{ctg}^3 x} \cdot \ln 3 \cdot 3 \operatorname{ctg}^2 x \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right).\end{aligned}$$

Следовательно, $y' = -3^{\operatorname{ctg}^3 x} \cdot \ln 3 \cdot 3 \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x}$, $x \neq m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

Пример 7.12. Найти производную функции

$$y = \ln \sqrt[5]{\frac{e^{2x}}{1 + \cos x}}, \quad x \neq \pi(2n + 1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решение. Предварительно преобразуем запись функции:

$$y = \frac{1}{5} \ln \left(\frac{e^{2x}}{1 + \cos x} \right) = \frac{1}{5} \ln(e^{2x}) - \frac{1}{5} \ln(1 + \cos x) = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} \ln(1 + \cos x).$$

Дифференцируя, получим

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \frac{(1 + \cos x)'}{1 + \cos x} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \frac{(-\sin x)}{1 + \cos x} = \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

7.4.3. Дифференцирование обратной функции

Если функция f строго монотонна и непрерывна в окрестности точки x_0 , дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ существует обратная функция f^{-1} , которая строго монотонна, непрерывна и имеет в точке y_0 конечную производную $(f^{-1})'(y_0)$. Производная обратной функции вычисляется по формуле

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Часто эту формулу записывают в виде

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

либо в виде

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Пример 7.13. Найти производную функции $\arcsin x$.

Решение. Используя формулу для вычисления производной обратной функции, вычислим

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Так как для $|x| < 1$ имеем $|\arcsin x| < \frac{\pi}{2}$, то $\cos(\arcsin x) > 0$. Следовательно,

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Таким образом,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1.$$

Пример 7.14. Найти производную функции $\arccos x$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру получим

$$(\arccos x)' = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}.$$

Так как для $|x| < 1$ имеем $0 < \arccos x < \pi$, то $\sin(\arccos x) > 0$.

В этом случае $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$.

Окончательно получим $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1 - x^2}$, $|x| < 1$.

Пример 7.15. Найти производную функции $\arctg x$.

Решение. По аналогии с предыдущими примерами имеем

$$(\arctg x)' = \frac{1}{tg'(\arctg x)} = \cos^2(\arctg x) = \frac{1}{1 + tg^2(\arctg x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

В результате $(\arctg x)' = 1/(1 + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Пример 7.16. Найти производную функции $\operatorname{arccctg} x$.

Решение. Используя формулу вычисления производной обратной функции, имеем

$$\begin{aligned} (\operatorname{arccctg} x)' &= \frac{1}{ctg'(\operatorname{arccctg} x)} = -\sin^2(\operatorname{arccctg} x) = \\ &= -\frac{1}{1 + ctg^2(\operatorname{arccctg} x)} = -\frac{1}{1 + x^2}, \end{aligned}$$

т. е.

$$(\operatorname{arccctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пример 7.17. Найти производную $\operatorname{arsh} x$.

Решение.

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{sh'(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{ch(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + sh^2(\operatorname{arsh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Итак,

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Замечание. Поскольку $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, то

$$\left(\ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right) \right)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

7.4.4. Производные основных элементарных функций

№ п/п	Функция	Производная
1	C	0
2	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
3	a^x	$a^x \ln a$
4	e^x	e^x
5	$\ln x , x \neq 0$	$\frac{1}{x}$
6	$\log_a x , x \neq 0$	$\frac{1}{x \ln a}$
7	$\sin x$	$\cos x$
8	$\cos x$	$-\sin x$
9	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
10	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
14	$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
15	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
16	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
17	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
18	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
19	$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
20	$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, x > 1$
21	$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, x < 1$	$\frac{1}{1-x^2}, x < 1$
22	$\operatorname{arc} h x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, x > 1$	$\frac{1}{1-x^2}, x > 1$

Пример 7.18. Найти производную функции $y = (2 + \sin x)^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Показательно-степенную функцию запишем в виде $y = e^{x \ln(2 + \sin x)}$. Тогда

$$y' = e^{x \ln(2 + \sin x)} (x \ln(2 + \sin x))' = (2 + \sin x)^x \left(\ln(2 + \sin x) + x \frac{\cos x}{2 + \sin x} \right).$$

Пример 7.19. Найти производную функции $y = x^{3^x}$, $x > 0$.

Решение. Данную показательно-степенную функцию запишем в виде $y = e^{3^x \ln x}$. Дифференцируя, получим

$$y' = e^{3^x \ln x} (3^x \ln x)' = x^{3^x} \left(3^x \cdot \ln 3 \cdot \ln x + 3^x \frac{1}{x} \right) = 3^x \cdot x^{3^x} \left(\ln 3 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \right).$$

Упражнение 7.1. Найти производные функций.

1. $y = \frac{\cos^2 x}{\cos x^2}$. (Ответ: $\frac{-\sin 2x \cdot \cos x^2 + 2x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x^2}{\cos^2 x^2}$).

2. $y = x^3 \sqrt[3]{x^2} + x^7 \sqrt[3]{x}$. (Ответ: $\frac{11x^2 \sqrt[3]{x^2} + 22x^6 \sqrt[3]{x}}{3}$).

3. $y = \operatorname{arctg} x + x + \operatorname{arccotg} x$. (Ответ: 1).

4. $y = \operatorname{arctg}^2 x + x \arcsin x$.

(Ответ: $\frac{2 \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} + \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$).

5. $y = \operatorname{ctg} x^2 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 2x$. (Ответ: $-2 \left(\frac{x}{\sin^2 x^2} + \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x} \right)$).

6. $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. (Ответ: $\frac{x}{x^4 - 1}$, $|x| > 1$).

7. $y = \operatorname{arccotg} 3^x$. (Ответ: $\frac{-3^x \ln 3}{1 + 3^{2x}}$).

8. $y = 3^{\cos^2 x}$. (Ответ: $-\ln 3 \cdot \sin 2x \cdot 3^{\cos^2 x}$).

$$9. \quad y = \frac{x}{2} (\sin \ln x + \cos \ln x). \quad (\text{ОТВЕТ: } \cos \ln x).$$

$$10. \quad y = \frac{\operatorname{ch} x^2}{\operatorname{sh}^2 x^2} - \ln \operatorname{cth} \frac{x^2}{2}. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{-4x}{\operatorname{sh}^3 x^2}).$$

$$11. \quad y = \ln \ln \ln x^2. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{2}{\ln \ln x^2 \cdot \ln x^2 \cdot x}).$$

$$12. \quad y = x - \ln \sqrt{1 + e^{2x}} + e^{-x} \operatorname{arctg} e^x. \quad (\text{ОТВЕТ: } -e^{-x} \operatorname{arctg} e^x).$$

$$13. \quad y = x^{x^2}. \quad (\text{ОТВЕТ: } x^{x^2+1}(2 \ln x + 1)).$$

$$14. \quad y = 3^{x^x}. \quad (\text{ОТВЕТ: } 3^{x^x} \cdot x^x \cdot \ln 3 \cdot (\ln x + 1)).$$

$$15. \quad y = x^{\cos x}. \quad (\text{ОТВЕТ: } x^{\cos x} \left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} \right)).$$

$$16. \quad y = x^{e^x}. \quad (\text{ОТВЕТ: } x^{e^x} \cdot e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)).$$

Упражнение 7.2. Вычислить производные функций в указанных точках.

$$1. \quad y = 2^{\operatorname{tg}(1/x)}, \quad x = 1/\pi.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } y' = -2^{\operatorname{tg}(1/x)} \frac{\ln 2}{x^2 \cos^2(1/x)}, \quad y'|_{x=1/\pi} = -\pi^2 \ln 2).$$

$$2. \quad y = \ln(1 + \sin^2 x) - 2 \sin x \cdot \operatorname{arctg} \sin x, \quad x = \pi/2.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } y' = -2 \cos x \cdot \operatorname{arctg} \sin x, \quad y'|_{x=\pi/2} = 0).$$

$$3. \quad y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}, \quad x=0, \quad x=1.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } y' = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}, \quad y'(0) = 2, \quad y'(1) = -2).$$

$$4. \quad y = (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}, \quad x=0.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } y' = (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x} \left(\operatorname{ch} x \cdot \ln \operatorname{ch} x + \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x} \right), \quad y'(0) = 0).$$

$$5. y = (\sqrt{1+3x})^{\ln x^2}, \quad x = 1.$$

$$(\text{Ответ: } y' = (\sqrt{1+3x})^{\ln x^2} \left(\frac{\ln(1+3x)}{x} + \frac{\ln|x| \cdot 3x \cdot \ln 3}{1+3x} \right), \\ y'(1) = 2 \ln 2).$$

Упражнение 7.3. Пользуясь определением производной, найти производные функций в указанных точках.

$$1. f(x) = 2 \sin 3x, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}. \quad (\text{Ответ: } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0).$$

$$2. f(x) = 1 + \ln 2x, \quad x_0 = 1. \quad (\text{Ответ: } f'(1) = 1).$$

$$3. f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1. \quad (\text{Ответ: } f'(1) = -1).$$

$$4. f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = 1. \quad (\text{Ответ: } f'(1) = 5).$$

Если приращение Δx достаточно мало, то, как следует из определения дифференцируемости функции, дифференциал функции f в точке x_0 дает хорошее приближение для $\Delta f(x_0)$, т. е. $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$ или, подробнее,

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Эта формула может быть использована для приближенных вычислений значений функции.

Пример 7.20. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить $\operatorname{arctg} 1,05$.

Решение. Введем функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ и положим $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,05$. Тогда $\operatorname{arctg} 1,05 = f(x_0 + \Delta x)$. Используя формулу $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ и учитывая, что $f(x_0) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ и $f'(1) = \frac{1}{2}$, получим

$$\operatorname{arctg} 1,05 \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0,05 \approx 0,785 + 0,025 = 0,810.$$

Таким образом, $\operatorname{arctg} 1,05 \approx 0,810$.

Пример 7.21. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить $\sqrt[3]{9}$.

Решение. С целью получить Δx достаточно малым преобразуем выражение $\sqrt[3]{9}$ следующим образом:

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{2^3 + 1} = 2\sqrt[3]{1 + \frac{1}{8}}.$$

Введем функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$ и положим $x_0 = 1$, $\Delta x = \frac{1}{8}$. Тогда

$f(1) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ и $f'(1) = \frac{1}{3}$. Используя формулу

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

получим

$$\sqrt[3]{9} \approx 2\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}\right) \approx 2,08.$$

7.4.5. Бесконечные и односторонние производные

Если предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ равен бесконечности, то говорят, что функция f имеет в точке x_0 *бесконечную производную*. Заметим, что в этом случае функция f недифференцируема в точке x_0 .

Пример 7.22. Исследовать дифференцируемость функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 0$.

Решение. В точке $x = 0$ имеем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty.$$

Таким образом, $f'(0) = +\infty$ и, следовательно, функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ недифференцируема в точке $x = 0$.

Для функции в точке x_0 можно ввести понятие односторонних производных.

Если существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется *правой производной* функции f в точке x_0 и обозначается символом $f'_+(x_0)$. Таким образом,

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Если существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется *левой производной* функции f в точке x_0 и обозначается символом $f'_-(x_0)$. Таким образом,

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Критерий дифференцируемости функции. Для дифференцируемости функции f в точке x_0 необходимо и достаточно существование в этой точке конечных левой и правой производных и их совпадение. При этом

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Пример 7.23. Исследовать дифференцируемость функции $f(x) = |x|$ в точке $x = 0$.

Решение. Вычислим в точке $x = 0$ правую и левую производные:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1. \end{aligned}$$

Поскольку в точке $x = 0$ правая и левая производные функции f не равны, то функция $f(x) = |x|$ недифференцируема в точке 0.

Замечание. Рассмотренный пример показывает, что из непрерывности функции не следует ее дифференцируемость.

Пример 7.24. Исследовать дифференцируемость функции $f(x) = x|x|$ в точке $x = 0$.

Решение. Поскольку

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x |\Delta x|}{\Delta x} = 0, \quad f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta x |\Delta x|}{\Delta x} = 0,$$

то функция $f(x) = x|x|$ дифференцируема в точке 0 и $f'(0) = 0$.

Отметим, что произведение дифференцируемой в точке функции на недифференцируемую в этой точке функцию оказалось функцией, дифференцируемой в этой точке.

Пример 7.25. Исследовать дифференцируемость функции

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0, \\ x, & x < 0, \end{cases}$$

на множестве задания.

Решение. Сначала убедимся, что функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Поскольку функция $\ln(1+x)$ непрерывна при $x > 0$, а функция x непрерывна при $x < 0$, то остается исследовать, непрерывна ли функция $f(x)$ в точке $x = 0$. Так как

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \ln(1+x) = 0,$$

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} x = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

то $f(0) = f(+0) = f(-0)$ и, значит, функция $f(x)$ непрерывна и в точке $x = 0$.

Далее, функция $\ln(1+x)$ дифференцируема при $x > 0$, а функция x дифференцируема при $x < 0$. Поэтому данная функция будет дифференцируема на $\mathbb{R}$, если она будет дифференцируема в точке $x = 0$. Для этого вычислим левую и правую производные:

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \left[\Delta x < 0 \Rightarrow f(\Delta x) = \Delta x \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \left[\Delta x > 0 \Rightarrow f(\Delta x) = \ln(1 + \Delta x) \right] = \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} = [\ln(1 + t) \sim t, \quad t \rightarrow 0] = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Поскольку левая и правая производные функции f равны, то функция f дифференцируема в точке $x = 0$ и $f'(0) = 1$.

Таким образом, данная функция $f(x)$ дифференцируема на $\mathbb{R}$.

Пример 7.26. Исследовать дифференцируемость функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0, \end{cases}$$

на $\mathbb{R}$.

Решение. Очевидно, что функция f непрерывна и дифференцируема при $x \neq 0$. Так как $f(+0) = 0$, $f(-0) = 0$, $f(0) = 0$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$.

Проверим дифференцируемость функции в точке $x = 0$. Для этого подсчитаем правую и левую производные в точке $x = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} = \left[\text{произведение бмф на ограниченную} \right] = 0, \\ f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \Delta x = 0.$$

Следовательно, функция f дифференцируема в точке $x = 0$ и $f'(0) = 0$. Значит, функция $f(x)$ дифференцируема на $\mathbb{R}$.

Пример 7.27. Подобрать значения параметров a и b так, чтобы функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ ax + b, & x > 1, \end{cases}$$

была дифференцируемой на $\mathbb{R}$.

Решение.

1. Сначала выясним, при каких значениях параметров функция f будет непрерывной в точке $x = 1$. При остальных x функция непрерывна.

Потребуем выполнения условия

$$f(1-0) = f(1+0) = f(1).$$

Так как

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1, \quad f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (ax+b) = a+b, \quad f(1) = a+b,$$

то $a+b=1$. Таким образом, при условии $a+b=1$ функция f непрерывна на $\mathbb{R}$.

2. Функция f дифференцируема во всех точках интервала $(-\infty; 1)$ и $f'(x) = 2x$, а также во всех точках интервала $(1; +\infty)$ и $f'(x) = a$.

Для дифференцируемости функции f в точке $x = 1$ достаточно, чтобы $f'_+(1) = f'_-(1)$.

Так как

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{a(1+\Delta x) + b - 1}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{a + a\Delta x + b - 1}{\Delta x} = \left[a + b = 1, \text{ см. выше} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a, \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2, \end{aligned}$$

то $a = 2$.

В результате получим систему

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ a = 2, \end{cases}$$

откуда $a = 2$, $b = -1$.

Таким образом, функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$ при $a = 2$, $b = -1$.

Пример 7.28. Найти левую и правую производные функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

в точке $x = 0$.

Решение.

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta x}{(1 + e^{1/\Delta x})\Delta x} = 1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{(1 + e^{1/\Delta x})\Delta x} = 0.$$

Упражнение 7.4. Найти правую и левую производные функций в указанных точках.

1. $f(x) = |\sin 3x|$, $x = 0$. (Ответ: $f'_+(0) = 3$, $f'_-(0) = -3$).

2. $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 1+x, & x \leq 0, \end{cases}$ $x = 0$. (Ответ: $f'_+(0) = -1$, $f'_-(0) = 1$).

3. $f(x) = |2^x - 2|$, $x = 1$. (Ответ: $f'_+(1) = 2 \ln 2$, $f'_-(1) = -2 \ln 2$).

4. $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$, $x = 2$, $x = 3$.

(Ответ: $f'_+(2) = 1$, $f'_-(2) = -1$, $f'_+(3) = 1$, $f'_-(3) = -1$).

5. $f(x) = \sqrt[3]{x} \operatorname{sgn} x$, $x = 0$. (Ответ: $f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(0) = -\infty$).

Упражнение 7.5. Исследовать дифференцируемость функций в указанных точках.

1. $f(x) = |\sin x|$, $x = \pi$.

(Ответ: $f'_+(\pi) = -1$, $f'_-(\pi) = 1$, недифференцируема).

2. $f(x) = |x^3(x+1)^2(x+2)|$, $x = 0$.

(Ответ: $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$, дифференцируема).

$$3. f(x) = |x^3(x+1)^2(x+2)|, \quad x = -1.$$

(Ответ: $f'_+(-1) = f'_-(-1) = 0$, дифференцируема).

$$4. f(x) = |x^3(x+1)^2(x+2)|, \quad x = -2.$$

(Ответ: $f'_+(-2) = -8$, $f'_-(-2) = 8$, недифференцируема).

Упражнение 7.6. Определить значения параметров a и b , при которых функции дифференцируемы на множестве задания.

$$1. f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 1, \\ x^2, & x > 1. \end{cases}$$

(Ответ: $a = 2$, $b = -1$).

$$2. f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & |x| < 1, \\ \frac{1}{|x|}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

(Ответ: $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$).

$$3. f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x \leq 1, \\ a(x-1)(x-2)(x-b), & 1 < x < 2, \\ \frac{x}{2} - 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

(Ответ: $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{9}{5}$).

$$4. f(x) = \begin{cases} (x+a)e^{-bx}, & x < 0, \\ ax^2 + bx + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

(Ответ: $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$).

$$5. f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 0, \\ a \cos x + b \sin x, & x \geq 0. \end{cases}$$

(Ответ: $a = b$).

7.5. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Если функция f дифференцируема в каждой точке интервала $(a; b)$, то говорят, что функция f *дифференцируема на интервале* $(a; b)$, и записывают $f \in D((a; b))$.

Запись $f \in D([a; b])$ означает следующее:

- 1) функция f дифференцируема на интервале $(a; b)$;
- 2) в точках $x = a$ и $x = b$ существуют соответственно правая и левая конечные производные: $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$.

Пусть $f \in D(X)$, где X — промежуток или объединение промежутков.

Тогда на множестве X определена функция f' , которая каждому $x \in X$ сопоставляет число $f'(x)$, т.е. $x \mapsto f'(x)$. Эта функция называется *производной функции* f . Если $f' \in C(X)$, то говорят, что f *непрерывно дифференцируема* на X , и записывают $f \in C^1(X)$.

Если функция f' дифференцируема в некоторой точке $x_0 \in X$, то производная функции f' в точке x_0 называется *второй производной* (*производной второго порядка*) функции f в точке x_0 и обозначается одним из символов $f''(x_0)$, $f^{(2)}(x_0)$, $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$, $D^2 f(x_0)$. Таким образом, $f''(x_0) = (f')'(x_0)$.

Если функция f дважды дифференцируема (т.е. существует производная второго порядка) в каждой точке $x \in X$, то можно построить функцию $f'' : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f'' : x \rightarrow f''(x)$.

Если функция f'' дифференцируема на X , то аналогичным образом можно построить функцию f''' .

Таким образом, приходим к *производной n -го порядка*, которая определяется по индукции: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$ или $f^{(n)}(x) = (f'(x))^{(n-1)}$.

Производную n -го порядка функции f обозначают также символами $\frac{d^n f}{dx^n}$, $D^n f$.

Множество n раз дифференцируемых на X функций обозначают $D^n(X)$. Если функция $f^{(n)}$ непрерывна на X , то говорят,

что функция f n раз непрерывно дифференцируема, и записывают $f \in C^n(X)$.

Пример 7.29. Найти производную второго порядка функции $f(x) = \ln|2+x|$, $x \neq -2$.

Решение. Так как $f'(x) = 1/(2+x)$, то

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{1}{2+x} \right)' = -\frac{1}{(2+x)^2}, \quad x \neq -2.$$

Пример 7.30. Для функции $f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$ найти $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(0)$.

Решение. Так как

$$f'(x) = 2x \operatorname{arctg} x + (1+x^2) \frac{1}{1+x^2} = 2x \operatorname{arctg} x + 1,$$

то

$$f''(x) = (2x \operatorname{arctg} x + 1)' = 2 \left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} \right).$$

Для нахождения $f'''(0)$ вычислим вначале $f'''(x)$:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (f''(x))' = 2 \left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} \right)' = \\ &= 2 \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \right) = 2 \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \right). \end{aligned}$$

Тогда $f'''(0) = 2 \left(1 + \frac{1}{1} \right) = 4$.

Упражнение 7.7. Для заданных функций найти $f''(x)$, $f'''(x_0)$.

1. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x_0 = 0$.

(Ответ: $f' = (1+x^2)^{-3/2}$, $f'' = -3x(1+x^2)^{-5/2}$,
 $f''' = -3(1-4x^2)(1+x^2)^{-7/2}$, $f'''(0) = -3$).

$$2. f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x_0 = 0.$$

$$\begin{aligned} (\text{Ответ: } f' &= \cos^{-2} x, \quad f'' = 2 \cos^{-3} x \sin x, \\ f''' &= 2 \cos^{-4} x (2 \sin^2 x + 1), \quad f'''(0) = 2). \end{aligned}$$

$$3. f(x) = \cos^2 x + \cos 2x, \quad x_0 = \pi/4.$$

$$\begin{aligned} (\text{Ответ: } f' &= -3 \sin 2x, \quad f'' = -6 \cos 2x, \\ f''' &= 12 \sin 2x, \quad f'''(\pi/4) = 12). \end{aligned}$$

$$4. f(x) = 2x + \operatorname{ctg} x, \quad x_0 = \pi/2.$$

$$\begin{aligned} (\text{Ответ: } f' &= 2 - \sin^{-2} x, \quad f'' = 2 \sin^{-3} x \cos x, \\ f''' &= -2 \sin^{-4} x (2 \cos^2 x + 1), \quad f'''(\pi/2) = -2). \end{aligned}$$

$$5. f(x) = x^x, \quad x_0 = 1.$$

$$\begin{aligned} (\text{Ответ: } f' &= x^x (\ln x + 1), \quad f'' = x^x \left((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right), \\ f''' &= x^x \left((\ln x + 1)^3 + 3 \frac{1}{x} (\ln x + 1) - \frac{1}{x^2} \right), \quad f'''(1) = 3). \end{aligned}$$

$$6. f(x) = (1 - x)e^{-2x}, \quad x_0 = 0.$$

$$\begin{aligned} (\text{Ответ: } f' &= (2x - 3)e^{-2x}, \quad f'' = 4(-x + 2)e^{-2x}, \\ f''' &= 4(2x - 5)e^{-2x}, \quad f'''(0) = -20). \end{aligned}$$

7.5.1. Производные высших порядков элементарных функций

Основные формулы

$$1. (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x > 0.$$

В частности, $(x^m)^{(n)} = 0$, если $m \in \mathbb{N}$ и $n > m$; $(x^m)^{(m)} = m!$.

$$2. (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}.$$

$$3. (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a. \quad \text{В частности, } (e^x)^{(n)} = e^x.$$

$$4. (\sin x)^{(n)} = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

$$5. (\cos x)^{(n)} = \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

$$6. (\operatorname{sh} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{sh} x, & n = 2k, \\ \operatorname{ch} x, & n = 2k - 1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$7. (\operatorname{ch} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & n = 2k, \\ \operatorname{sh} x, & n = 2k - 1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пример 7.31. Найти производную n -го порядка функции $f(x) = \cos 2x$.

Решение. Имеем: $f'(x) = -2 \sin 2x = 2 \left(\cos 2x + 1 \cdot \frac{\pi}{2} \right)$,
 $f''(x) = -2^2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) = 2^2 \cos \left(2x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right)$. По индукции

$$f^{(n)}(x) = (\cos 2x)^{(n)} = 2^n \cos \left(2x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

Используя таблицу производных и метод математической индукции, получим:

- 1) $((ax+b)^\alpha)^{(n)} = a^n \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}, \quad \alpha \in \mathbb{R};$
- 2) $(\ln ax)^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0;$
- 3) $(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin \left(ax + n \frac{\pi}{2} \right);$
- 4) $(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos \left(ax + n \frac{\pi}{2} \right);$
- 5) $(\operatorname{sh} ax)^{(n)} = \begin{cases} a^n \operatorname{sh} ax, & n = 2k, \\ a^n \operatorname{ch} ax, & n = 2k - 1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N};$
- 6) $(\operatorname{ch} ax)^{(n)} = \begin{cases} a^n \operatorname{ch} ax, & n = 2k, \\ a^n \operatorname{sh} ax, & n = 2k - 1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$

Пример 7.32. Найти $f^{(10)}(x)$, если $f(x) = \sin 4x$.

Решение. На основании п. 3) получим

$$\begin{aligned} f^{(10)}(x) &= (\sin 4x)^{(10)} = 4^{10} \sin \left(4x + 10 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= 4^{10} (\sin 4x + 5\pi) = 4^{10} \sin(4x + \pi) = -4^{10} \sin 4x. \end{aligned}$$

Пример 7.33. Найти $f^{(20)}(x)$, если $f(x) = \frac{1}{2x-1}$.

Решение. Так как $f(x) = (2x-1)^{-1}$, то

$$\begin{aligned} f^{(20)}(x) &= 2^{20}(-1)(-2) \cdots (-1-19)(2x-1)^{-1-20} = \\ &= 2^{20}(-1)(-2) \cdots (-20)(2x-1)^{-21} = 2^{20}(-1)^{20} \cdot 20!(2x-1)^{-21} = \\ &= 2^{20} \cdot 20!(2x-1)^{-21}. \end{aligned}$$

7.5.2. Дифференциалы высших порядков

Аналогично тому, как определяются производные высших порядков, определяются и дифференциалы высших порядков.

Предположим, что $f \in D^n(X)$, и определим последовательно: $d^2f = d(df)$, $d^3f = d(d^2f)$, ..., $d^n f = d(d^{n-1}f)$. В этом случае d^2f называется *дифференциалом второго порядка* (или *вторым дифференциалом*), d^3f — *дифференциалом третьего порядка*, ..., $d^n f$ — *дифференциалом n -го порядка*.

Если x — независимая переменная, то дифференциал второго порядка вычисляется по формуле $d^2f(x) = f''(x)dx^2$, где $dx^2 = (dx)^2$. Если же x является зависимой переменной, то $d^2f(x) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$. Таким образом, форма дифференциала второго и последующих порядков функции f меняется в зависимости от того, является x независимой или зависимой переменной. А это означает, что дифференциал второго и более высоких порядков не обладает инвариантностью формы.

Отметим, что если x — независимая переменная, то

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n.$$

Пример 7.34. Считая x независимой переменной, вычислить $d^5f(x)$, если $f(x) = 2^{3x}$.

Решение. Так как $f^{(5)}(x) = 3^5 \cdot 2^{3x} \cdot \ln^5 2$, то

$$d^5f(x) = f^{(5)}(x)dx^5 = 2^{3x} \cdot 3^5 \cdot \ln^5 2 dx^5.$$

Пример 7.35. Вычислить дифференциал второго порядка функции $f(x) = e^{x^2}$ в двух случаях:

- а) x независимая переменная;
 б) x зависимая переменная (промежуточный аргумент).
 Решение.

а) Используем формулу $d^2 f(x) = f''(x) dx^2$. Для этого найдем $f'(x) = 2xe^{x^2}$, $f''(x) = 2(2x^2 + 1)e^{x^2}$. Таким образом,

$$d^2 f(x) = 2(2x^2 + 1)e^{x^2} dx^2.$$

б) В этом случае используем формулу $d^2 f(x) = f''(x) dx^2 + f'(x) d^2 x$. В результате получим

$$d^2 f(x) = 2(2x^2 + 1)e^{x^2} dx^2 + 2xe^{x^2} d^2 x.$$

Пример 7.36. Найти dy и $d^2 y$, если $y = \frac{u}{v}$, где u и v дважды дифференцируемые функции.

Решение. Имеем $dy = d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$. Далее вычислим

$$\begin{aligned} d^2 y &= d(dy) = d\left(\frac{v du - u dv}{v^2}\right) = \frac{d(v du - u dv)v^2 - (v du - u dv)d(v^2)}{v^4} = \\ &= \frac{(d(v du) - d(u dv))v^2 - (v du - u dv)2v dv}{v^4} = \\ &= \frac{v(dv du + v d^2 u - du dv - u d^2 v) - 2(v du dv - u dv^2)}{v^3} = \\ &= \frac{v^2 d^2 u - uv d^2 v - 2v du dv + 2u dv^2}{v^3} = \\ &= \frac{1}{v} d^2 u - \frac{u}{v^2} d^2 v - \frac{2}{v^2} du dv + \frac{2u}{v^3} dv^2. \end{aligned}$$

7.5.3. Производные и дифференциалы высших порядков арифметических комбинаций

В предположении, что $u, v \in D^n(X)$ и α, β постоянные, имеют место следующие равенства:

$$(\alpha u + \beta v)^{(n)}(x) = \alpha u^{(n)}(x) + \beta v^{(n)}(x), \quad d^n(\alpha u + \beta v) = \alpha d^n u + \beta d^n v,$$

которые позволяют находить производные и дифференциалы n -го порядка линейной комбинации функций.

Пример 7.37. Найти $f^{(10)}(x)$ для функции $f(x) = \sin^4 x$.

Решение. Для нахождения указанной производной предварительно проведем преобразования:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} f^{(10)}(x) &= \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right)^{(10)} = \left(\frac{3}{8} \right)^{(10)} - \frac{1}{2} (\cos 2x)^{(10)} + \\ &+ \frac{1}{8} (\cos 4x)^{(10)} = 0 - \frac{1}{2} \cdot 2^{10} \cos \left(2x + 10 \cdot \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{8} \cdot 4^{10} \cos \left(4x + 10 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= -2^9 \cos 2x - 2^{17} \cos 4x. \end{aligned}$$

Пример 7.38. Найти $f^{(8)}(x)$, если $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$.

Решение. Разложим дробь $\frac{1}{x^2 - 4}$ на простейшие дроби:

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2) + b(x-2)}{x^2 - 4},$$

откуда получим тождество $1 = a(x+2) + b(x-2)$. Полагая последовательно $x = 2$ и $x = -2$, найдем, что $a = 1/4$, $b = -1/4$. Таким образом,

$$f(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f^{(8)}(x) &= \frac{1}{4} (((x-2)^{-1})^{(8)} - ((x+2)^{-1})^{(8)}) = \\ &= \frac{1}{4} ((-1)^8 8! (x-2)^{-9} - (-1)^8 8! (x+2)^{-9}) = \frac{1}{4} 8! \left(\frac{1}{(x-2)^9} - \frac{1}{(x+2)^9} \right) = \\ &= 2 \cdot 7! \left(\frac{1}{(x-2)^9} - \frac{1}{(x+2)^9} \right). \end{aligned}$$

Для вычисления производной n -го порядка произведения функций u и v , где $u, v \in D^n(X)$, используют так называемое *правило Лейбница*:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

Здесь предполагается, что $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$, C_n^k — число сочетаний из n по k :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Пример 7.39. Найти производную $f^{(100)}(x)$ функции $f(x) = (x^3 + x^2 + 3x + 2) \cos 3x$.

Решение. Воспользуемся правилом Лейбница. Так как $(x^3 + x^2 + 3x + 2)^{(3)} = 3!$, а $(x^3 + x^2 + 3x + 2)^{(k)} = 0$ при $k \geq 4$, то, полагая $u = x^3 + x^2 + 3x + 2$, $v = \cos 3x$, получим

$$\begin{aligned} (uv)^{(100)} &= ((x^3 + x^2 + 3x + 2) \cos 3x)^{(100)} = \\ &= (x^3 + x^2 + 3x + 2)^{(0)} (\cos 3x)^{(100)} + 100(x^3 + x^2 + 3x + 2)^{(1)} (\cos 3x)^{(99)} + \\ &\quad + \frac{100 \cdot 99}{2} (x^3 + x^2 + 3x + 2)^{(2)} (\cos 3x)^{(98)} + \\ &\quad + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{6} (x^3 + x^2 + 3x + 2)^{(3)} (\cos 3x)^{(97)} + 0 = \\ &= (x^3 + x^2 + 3x + 2) \cdot 3^{100} \cos \left(3x + 100 \frac{\pi}{2} \right) + \\ &\quad + 100(3x^2 + 2x + 3) \cdot 3^{99} \cos \left(3x + 99 \frac{\pi}{2} \right) + \\ &\quad + \frac{100 \cdot 99}{2} (6x + 2) 3^{98} \cos \left(3x + 98 \frac{\pi}{2} \right) + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{6} \cdot 6 \cdot 3^{97} \cos \left(3x + 97 \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= 3^{98} ((9x^3 + 9x^2 - 29673x - 9882) \cos 3x + 100(9x^2 + 18x - 3225) \sin 3x). \end{aligned}$$

Упражнение 7.8. Найти производные n -го порядка для указанных функций.

1. $f(x) = (x-1)2^{x-1}$, $n = 10$.

(Ответ: $f^{(10)}(x) = 2^{x-1} \ln^9 2 (\ln 2 \cdot (x-1) + 10)$).

2. $f(x) = \ln(x-1)^{2x}$, $x > 1$, $n = 12$.

(Ответ: $f^{(10)}(x) = 2 \cdot 10! (x-12)(x-1)^{-12}$).

3. $f(x) = (x^2 + x) \cos^2 x$, $n = 10$.

(Ответ: $f^{(12)}(x) =$
 $= -2^8 ((2x^2 + 2x - 45) \cos 2x + 10(2x + 1) \sin 2x)$).

4. $f(x) = \cos^3 x$, $n = 7$.

(Ответ: $f^{(7)}(x) = \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{4} \cdot 3^7 \sin 3x$).

5. $f(x) = (2x+1)^{-3}$, $n = 6$.

(Ответ: $f^{(6)}(x) = 2^5 \cdot 8! (2x+1)^{-9}$).

Упражнение 7.9. Вычислить дифференциалы второго порядка указанных функций в двух случаях:

а) x — независимая переменная;

б) x — зависимая переменная.

1. $f(x) = xe^{-x}$. (Ответ: а) $d^2 f = (x-2)e^{-x} dx^2$;

б) $d^2 f = (x-2)e^{-x} dx^2 + (1-x)e^{-x} d^2 x$).

2. $f(x) = \sin x^2$. (Ответ: а) $d^2 f = (2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2) dx^2$;

б) $d^2 f = (2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2) dx^2 + 2x \cos x^2 d^2 x$).

3. $f(x) = \ln |2+x|$. (Ответ: а) $d^2 f = -\frac{1}{(2+x)^2} dx^2$;

б) $d^2 f = -\frac{1}{(2+x)^2} dx^2 + \frac{1}{2+x} d^2 x$, $x \neq -2$).

$$4. f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}.$$

$$(\text{Ответ: а) } d^2 f = (x^2 - 3x + 1)e^{-x} dx^2;$$

$$\text{б) } d^2 f = (x^2 - 3x + 1)e^{-x} dx^2 + (x - x^2)e^{-x} d^2 x).$$

$$5. f(x) = 2^{3x}.$$

$$(\text{Ответ: а) } d^2 f = 2^{3x} 3^2 \ln^2 2 dx^2;$$

$$\text{б) } d^2 f = 2^{3x} 3^2 \ln^2 2 dx^2 + 2^{3x} 3 \ln 2 d^2 x).$$

Упражнение 7.10. Найти $d^2 y$, считая известными du , dv , $d^2 u$, $d^2 v$.

$$1. y = u(2 + v).$$

$$(\text{Ответ: } d^2 y = (v + 2) d^2 u + 2 du dv + u d^2 v).$$

$$2. y = u \ln v.$$

$$(\text{Ответ: } d^2 y = \ln v d^2 u + \frac{2}{v} du dv + \frac{u}{v} d^2 v - \frac{u}{v^2} dv^2).$$

$$3. y = e^{uv}.$$

$$(\text{Ответ: } d^2 y = e^{uv} (u d^2 v + 2 du dv + v d^2 u + (u dv + v du)^2)).$$

Упражнение 7.11. В точке x_0 найти производные или дифференциалы указанных порядков.

$$1. y = e^{\sqrt{x}}, \quad y''(x_0) = ?, \quad x_0 = 4. \quad (\text{Ответ: } y''(4) = \frac{e^2}{32}).$$

$$2. y = \frac{x^3}{3 - x^2}, \quad d^2 y = ?, \quad x_0 = 1. \quad (\text{Ответ: } d^2 y(1) = \frac{15}{2} dx^2).$$

$$3. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad y''(x_0) = ?, \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } y''(0) = 0).$$

$$4. y = \frac{3x + 2}{x^2 - 2x + 5}, \quad d^2 y = ?, \quad x_0 = 0.$$

$$(\text{Ответ: } d^2 y(0) = \frac{56}{125} dx^2).$$

7.6. ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НЕЯВНО

Рассмотрим пары чисел (x, y) , удовлетворяющих соотношению $F(x, y) = 0$. Предположим, что существует такое множество $X \subset \mathbb{R}$, что для каждого $x \in X$ найдется по крайней мере одно y такое, что $F(x, y) = 0$. Выбирая для каждого $x \in X$ ровно одно y из числа возможных, придем к функции $f: X \rightarrow Y (y \in Y)$.

Если подставить $y = f(x)$ в соотношение $F(x, y) = 0$, то из способа построения функции f вытекает, что $F(x, f(x)) =$

0 для любых $x \in X$, т.е. получим тождество. Построенная таким образом функция f называется *функцией, заданной неявно* соотношением $F(x, y) = 0$ или, коротко, *неявной функцией*. Соотношение $F(x, y) = 0$ в этом случае называется также *функциональным уравнением*.

Заметим, что явное задание функции $y = f(x)$, $x \in X$, можно представить как частный случай неявного задания, а именно $y - f(x) = 0$, т.е. $F(x, y) = y - f(x)$.

Дифференцируя тождество $F(x, y(x)) = 0$, получим линейное уравнение относительно f' . Решая это линейное уравнение, находим производную f' , которая выражается через x и y . Последующие дифференцирования позволяют находить производные второго и последующих порядков.

Пример 7.40. Найти y' , y'' от функции $y = y(x)$, заданной неявно соотношением $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Подставляя $y = y(x)$ в соотношение, получим тождество $x^2 + y^2(x) = 1$. Продифференцируем его (далее аргумент x опустим и вместо $y(x)$, $y'(x)$, ... будем писать y , y' , ...), получим $2x + 2yy' = 0$, откуда $y' = -x/y$.

Дифференцируя далее тождество $x + yy' = 0$, получим $1 + (y')^2 + yy'' = 0$. Отсюда найдем

$$y'' = -\frac{1}{y}(1 + y'^2) = -\frac{1}{y}\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3},$$

так как $x^2 + y^2 = 1$.

Аналогичным образом вычисляют и дифференциалы функций, заданных неявно.

Пример 7.41. Найти dy и d^2y для функции $y = y(x)$, заданной неявно соотношением $x^2 + xy + y^2 = 3$.

Решение. Считая соотношение $x^2 + xy + y^2 = 3$ тождеством, найдем дифференциалы левой и правой частей, т.е. $d(x^2 + xy + y^2) = 0$. Получим $2x dx + x dy + y dx + 2y dy = 0$, откуда

$$dy = -\frac{2x + y}{x + 2y} dx.$$

Находя опять дифференциалы правой и левой частей тождества

$$2x dx + x dy + y dx + 2y dy = 0,$$

получаем

$$2 dx^2 + 2 dx dy + x d^2y + 2 dy^2 + 2y d^2y = 0.$$

Из последнего тождества находим

$$d^2y = -\frac{2 dx^2 + 2 dx dy + 2 dy^2}{x + 2y}.$$

Подставляя вместо dy его выражение, получим, что

$$d^2y = -\frac{6(x^2 + xy + y^2)}{(x + 2y)^3} dx^2 = -\frac{18}{(x + 2y)^3} dx^2.$$

Пример 7.42. Для функции $y(x)$, заданной неявно соотношением $x^4 - x^2y - y^3 = 0$, вычислить y' и y'' в точке $(2; 2)$.

Решение. Продифференцируем данное тождество, получим

$$4x^3 - 2xy - x^2y' - 3y^2y' = 0.$$

Рассмотрим последнее равенство в точке $(2; 2)$:

$$4 \cdot 8 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 4y' - 12y' = 0,$$

$$\text{откуда } y'(2; 2) = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}.$$

Далее, дифференцируя тождество $4x^3 - 2xy - x^2y' - 3y^2y' = 0$, получаем $12x^2 - 2y - 2xy' - 2xy' - x^2y'' - 6yy'^2 - 3y^2y'' = 0$. Данное равенство в точке $(2; 2)$:

$$12 \cdot 4 - 2 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} - 4y'' - 6 \cdot 2 \cdot \frac{9}{4} - 3 \cdot 4y'' = 0,$$

$$\text{откуда } y''(2; 2) = \frac{5}{16}.$$

Пример 7.43. Найти $d^2y(1; 1)$ для функции $y(x)$, заданной неявно соотношением $3x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$.

Решение. Найдем дифференциалы правой и левой частей соотношения:

$$6x dx + 2y dx + 2x dy + 2y dy - 4 dx + 2 dy = 0.$$

Рассмотрим полученное равенство в точке $(1; 1)$:

$$6 dx + 2 dx + 2 dy + 2 dy - 4 dx + 2 dy = 0.$$

$$\text{Отсюда } 4 dx + 6 dy = 0, \text{ т. е. } dy(1; 1) = -\frac{2}{3} dx.$$

Далее, опять вычисляя дифференциалы левой и правой частей тождества

$$6x dx + 2y dx + 2x dy + 2y dy - 4 dx + 2 dy = 0,$$

получим равенство

$$6 dx^2 + 4 dx dy + 2x d^2y + 2(dy)^2 + 2y d^2y + 2 d^2y = 0,$$

которое рассмотрим в точке $(1; 1)$:

$$\begin{aligned} 6 dx^2 + 4 dx \left(\frac{-2}{3} dx \right) + 2 d^2y + 2 \cdot \frac{4}{9} dx^2 + 2 d^2y + 2 d^2y &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{38}{9} dx^2 + 6 d^2y &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{В результате } d^2y(1; 1) = -\frac{19}{27} dx^2.$$

Упражнение 7.12. Найти производные или дифференциалы в точке $(x_0; y_0)$ для функций $y = y(x)$, заданных неявно.

1. $2 \ln(y - x) + \sin xy = 0, \quad d^2y(0; 1) = ?.$

(Ответ: $d^2y(0; 1) = -\frac{1}{4}dx^2$).

2. $y + \cos y = x, \quad y''(1; 0) = ?.$ (Ответ: $y''(1; 0) = 1$).

3. $e^{2y} - 2 \ln x + 2 \ln 2 = y + 1, \quad y''(2; 0) = ?.$

(Ответ: $y''(2; 0) = -\frac{9}{4}$).

4. $x^3y + \arcsin(y - x) = 1, \quad d^2y(1; 1) = ?.$

(Ответ: $d^2y(1; 1) = 0$).

5. $x^2 - xy + y^3 = 1, \quad y'''(1; 1) = ?.$ (Ответ: $y'''(1; 1) = -\frac{39}{4}$).

7.7. ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Пусть заданы функции

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in |\alpha; \beta|.$$

Предположим, что функция φ обратима и $t = \varphi^{-1}(x)$ функция, обратная функции $x = \varphi(t)$. Построим функцию $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Эта функция называется *функцией, заданной параметрически* соотношениями $x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in |\alpha; \beta|$.

При определенных условиях пара функций $x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in |\alpha; \beta|$, задает некоторую кривую на плоскости.

Отметим, что явно заданную функцию $y = f(x), \quad x \in |a; b|$, можно представить как частный случай параметрического задания:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \end{cases} \quad t \in |a; b|.$$

Если дополнительно потребовать, чтобы $\varphi, \psi \in D(|\alpha; \beta|)$, причем $\varphi'(t) \neq 0$, $t \in |\alpha; \beta|$, то производную функции, заданной параметрически, можно найти по формуле

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

(В выражении y'_x индекс x показывает, по какой переменной производится дифференцирование. Таким образом, y'_x производная функции y по x , y'_t производная функции y по t , т. е. $y'_t = \psi'(t)$.)

Функцию, заданную параметрически, записывают и так:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in |\alpha; \beta|.$$

Тогда $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Производная функции, заданной параметрически, также представляет собой функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \\ x = x(t), \end{cases} \quad t \in |\alpha; \beta|.$$

Поскольку $y''_{xx} = y''_{x^2} = (y'_x)'_x$, то, применяя формулу для вычисления первой производной, получим формулу для вычисления второй производной функции, заданной параметрически:

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)'_x = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{t^2} x'_t - y'_t x''_{t^2}}{(x'_t)^3}.$$

Используя указанный подход, вычисляют и производные более высоких порядков. Например,

$$y'''_{x^3} = (y''_{x^2})'_x = \frac{(y''_{x^2})'_t}{x'_t}.$$

Пример 7.44. Найти производные y'_x , y''_{x^2} функции $y = y(x)$, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = (t - \sin t), \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Решение. Используя формулу $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, получим

$$y'_x = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, \quad t \neq 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2}\right)'}{1 - \cos t} = -\frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{-1}{4 \sin^4 \frac{t}{2}}.$$

Упражнение 7.13. Найти производные y'_x , y''_{x^2} функции $y = y(x)$, заданной параметрически. Вычислить y'''_{x^3} при значении параметра t_0 .

$$1. \quad \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$(\text{Ответ: } y'_x = -\frac{3}{2} \operatorname{ctg} t, \quad y''_{x^2} = \frac{3}{4} \frac{1}{\sin^3 t}, \quad y'''_{x^3} \Big|_{t=\pi/4} = \frac{9}{2}).$$

$$2. \quad \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} \quad t_0 = 0.$$

$$(\text{Ответ: } y'_x = \frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}, \quad y''_{x^2} = \frac{2e^{-t}}{(\cos t - \sin t)^3}, \quad y'''_{x^3} \Big|_{t=0} = 4).$$

$$3. \quad \begin{cases} x = (t-1)^{-1}, \\ y = t(t+1)^{-1}, \end{cases} \quad t_0 = 0.$$

$$(\text{Ответ: } y'_x = -\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2, \quad y''_{x^2} = 4\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^3, \quad y'''_{x^3} \Big|_{t=0} = -24).$$

$$4. \begin{cases} x = 1 + e^t, \\ y = 2t + e^{2t}, \end{cases} \quad t_0 = 0.$$

$$(\text{Ответ: } y'_x = 2(e^{-t} + e^t), \quad y''_{x^2} = 2(1 - e^{-2t}), \quad y'''_{x^3} \Big|_{t=0} = 4).$$

$$5. \begin{cases} x = \ln \sin t, \\ y = \ln \sin 2t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$(\text{Ответ: } y'_x = 1 - \operatorname{tg}^2 t, \quad y''_{x^2} = -2 \operatorname{tg}^2 t (1 + \operatorname{tg}^2 t), \quad y'''_{x^3} \Big|_{t=\pi/4} = -24).$$

$$6. \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1 - t^2), \end{cases} \quad t_0 = 0.$$

$$(\text{Ответ: } y'_x = -\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad y''_{x^2} = -\frac{2}{1-t^2}, \quad y'''_{x^3} \Big|_{t=0} = 0).$$

7.8. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

7.8.1. Геометрические приложения производной

Если функция f дифференцируема во внутренней точке x_0 из множества задания, то в точке $(x_0; f(x_0))$ существует касательная к графику Γ_f . Касательная к графику Γ_f в точке $(x_0; f(x_0))$ — это прямая, являющаяся графиком функции $y = k(x - x_0) + f(x_0)$, где угловой коэффициент $k = f'(x_0)$, т. е. $k = \operatorname{tg} \alpha$ (α — угол, образованный касательной с положительным направлением оси Ox).

Таким образом, уравнение касательной имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Если функция f непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке бесконечную производную, то в точке $(x_0; f(x_0))$ графика Γ_f касательная вертикальна и ее уравнение есть $x = x_0$.

Прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$ графика Γ_f перпендикулярно касательной, называется *нормальной прямой* к графику Γ_f или, коротко, *нормалью*.

Если $f'(x_0) \neq 0$, то уравнение нормали имеет вид

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

Если же $f'(x_0) = 0$, то уравнение нормали есть прямая $x = x_0$.

Пример 7.45. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции $y = \sqrt{5 - x^2}$ в точке $(1; 2)$.

Решение. Найдем производную функции в точке $x = 1$:

$$y' = -\frac{2x}{2\sqrt{5 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{5 - x^2}} \Rightarrow y'(1) = -\frac{1}{2}.$$

Поскольку $y(1) = 2$, то уравнение касательной принимает вид $y = -\frac{1}{2}(x - 1) + 2$, т. е. $y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$, а уравнение нормали вид $y = 2(x - 1) + 2$, т. е. $y = 2x$.

Пример 7.46. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно соотношением $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0$, в точке $M(1; 2)$.

Решение. Для написания уравнений касательной и нормали надо вычислить производную функции в точке. Дифференцируя соотношение $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0$, получим равенство $4y^3y' - 16x^3 - 6y - 6xy' = 0$, которое в точке $M(1; 2)$ дает

$$4 \cdot 2^3 \cdot y' - 16 - 6 \cdot 2 - 6 \cdot 1 \cdot y' = 0, \text{ откуда } y' = \frac{14}{13}.$$

Тогда $y = \frac{14}{13}(x - 1) + 2 \Leftrightarrow 14x - 13y + 12 = 0$ уравнение касательной, а $y = -\frac{13}{14}(x - 1) + 2 \Leftrightarrow 13x + 14y - 41 = 0$ уравнение нормали.

Пример 7.47. Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \quad \text{при } t = 2.$$

Решение. Поскольку кривая $y = y(x)$ задана параметрически, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t$$

и, следовательно, $y'_x|_{t=2} = 3$.

Найдем точку касания: $x(2) = 4$, $y(2) = 8$. Таким образом, $y = 3(x - 4) + 8 \Leftrightarrow y = 3x - 4 \Leftrightarrow 3x - y - 4 = 0$ уравнение касательной, а $y = -\frac{1}{3}(x - 4) + 8 \Leftrightarrow x + 3y - 28 = 0$ уравнение нормали.

Пример 7.48. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = (x - 2)^{3/5}$ в точке $(2; 0)$.

Решение. Исходя из определения, найдем, что

$$y'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(2 + \Delta x) - y(2)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^{3/5}}{\Delta x} = +\infty.$$

Таким образом, функция $y = (x - 2)^{3/5}$ при $x = 2$ имеет бесконечную производную и уравнение касательной в точке $(2; 0)$ есть $x = 2$. Так как нормаль — это прямая, проходящая через точку $(2; 0)$ перпендикулярно касательной, то $y = 0$ уравнение нормали.

Упражнение 7.14. Написать уравнения касательной и нормали к графикам заданных кривых в указанных точках.

$$1. \quad y = 4 \operatorname{ctg} x - \frac{\cos x}{\sin^2 x}, \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

$$(\text{Ответ: } 3x + y - \frac{3\pi}{2} = 0, \quad x - 3y - \frac{\pi}{2} = 0).$$

$$2. \quad y = \sqrt[3]{x + 3}, \quad x = -3. \quad (\text{Ответ: } x = -3, \quad y = 0).$$

$$3. \quad x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0, \quad M(-1; 3).$$

$$(\text{Ответ: } 5x + 6y - 13 = 0, \quad 6x - 5y + 21 = 0).$$

$$4. \quad x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0, \quad M(0; 0).$$

$$(\text{Ответ: } x - 3y = 0, \quad 3x + y = 0).$$

$$5. \quad x = 2 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad t = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{Ответ: } y = 3, \quad x = 0).$$

$$6. \quad x = 2 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad t = \frac{\pi}{4}.$$

$$(\text{Ответ: } 3x + 2y - 6\sqrt{2} = 0, \quad 2x - 3y + \frac{5\sqrt{2}}{2} = 0).$$

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 правую производную $f'_+(x_0)$, то уравнение правой полукасательной (правой касательной) к графику Γ_f функции f в точке $(x_0; f(x_0))$ имеет вид

$$y = f'_+(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Аналогично записывается уравнение левой полукасательной (левой касательной):

$$y = f'_-(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Пусть функции f_1 и f_2 дифференцируемы в точке x_0 и графики Γ_{f_1} и Γ_{f_2} функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ пересекаются в точке $M(x_0; y_0)$.

Углом между графиками Γ_{f_1} и Γ_{f_2} в точке M называют угол φ , образованный касательными к графикам Γ_{f_1} и Γ_{f_2} в точке M . При этом берут меньший из углов. Тангенс этого угла определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{f'_1(x_0) - f'_2(x_0)}{1 + f'_1(x_0)f'_2(x_0)} \right|, \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Если же $1 + f'_1(x_0)f'_2(x_0) = 0$, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Пример 7.49. Найти углы, под которыми график функции $y = (x - 3)^2(x + 2)^3(x - 4)$ пересекает ось абсцисс.

Решение. Найдем точки пересечения графика Γ_f функции с осью абсцисс: $y = 0 \Rightarrow x = 3, \quad x = -2, \quad x = 4$. Поскольку $y' = 2(x - 3)(x + 2)^3(x - 4) + 3(x - 3)^2(x + 2)^2(x - 4) + (x - 3)^2(x + 2)^3$, то $y'(3) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$; $y'(-2) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$; $y'(4) = 6^3 \Rightarrow \Rightarrow \varphi = \arctg 216$.

Пример 7.50. Найти точки, в которых касательные к графику функции $y = (9 - 3x - x^2)e^x$ параллельны оси абсцисс.

Решение. Уравнение оси абсцисс есть $y = 0$, и угловой коэффициент этой прямой равен нулю. Следовательно, касательная будет параллельна прямой $y = 0$, если угловой коэффициент касательной, т. е. y' , будет равен нулю.

Поскольку

$$y' = (-3 - 2x + 9 - 3x - x^2)e^x = (6 - 5x - x^2)e^x,$$

то $y' = 0$ при $x = 1$ и $x = -6$. Так как $y(1) = 5e$, а $y(-6) = -9e^{-6}$, то касательные к графику данной функции будут параллельны оси абсцисс в точках $(1; 5e)$ и $(-6; -9e^{-6})$.

Пример 7.51. Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются графики функций $y = x^2$ и $x = y^2$.

Решение. Найдем точки пересечения кривых. Для этого решим систему уравнений $\begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2, \end{cases}$ из которой получим

$$x = x^4 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Следовательно, $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ и, соответственно, $y_1 = 0$ и $y_2 = 1$. Таким образом, получили две точки пересечения кривых: $M_1(0; 0)$ и $M_2(1; 1)$.

Рассмотрим точку $M_1(0; 0)$. Так как парабола $y = x^2$ касается оси Ox в точке $(0; 0)$, а парабола $x = y^2$ в этой точке касается оси Oy , то угол φ между кривыми равен $\pi/2$.

Вычислим угловые коэффициенты касательных: $y = x^2 \Rightarrow y'_1 = 2x$, $x = y^2 \Rightarrow 1 = 2yy' \Rightarrow y'_2 = \frac{1}{2y}$.

В точке $M_2(1; 1)$ получим $y'_1 = 2$, $y'_2 = 1/2$. Поэтому

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{y'_1(1) - y'_2(1)}{1 + y'_1(1)y'_2(1)} \right| = \left| \frac{2 - 1/2}{1 + 1} \right| = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, угол $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$.

Пример 7.52. Найти угол между левой и правой полукасательными к графику функции $y = 2x + 3|x|$ при $x = 0$.

Решение. Найдем левую и правую производные функции в точке $x = 0$:

$$\begin{aligned} f'_-(0) = y'_-(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{y(\Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{2\Delta x + 3|\Delta x|}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{2\Delta x - 3\Delta x}{\Delta x} = -1, \\ f'_+(0) = y'_+(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{y(\Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{2\Delta x + 3|\Delta x|}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{2\Delta x + 3\Delta x}{\Delta x} = 5. \end{aligned}$$

Следовательно, так как

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{y'_+(0) - y'_-(0)}{1 + y'_+(0)y'_-(0)} \right| = \left| \frac{5 + 1}{1 - 5} \right| = \frac{6}{4} = \frac{3}{2},$$

то $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$.

Пример 7.53. Найти угол, под которым луч $y = x$, $x \geq 0$, пересекает эллипс $x = 4 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$.

Решение. Луч $y = x$ пересекает эллипс в точке $M(x_0; y_0)$, где $x_0 = 4 \cos t_0$, $y_0 = 2 \sin t_0$, и, следовательно, удовлетворяет равенству

$$4 \cos t_0 = 2 \sin t_0, \quad 0 < t_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку угловой коэффициент луча $y = x$ в точке M равен 1, а для эллипса

$$y'_x(t_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} = \frac{2 \cos t_0}{-4 \sin t_0} = [4 \cos t_0 = 2 \sin t_0] = \frac{2 \cos t_0}{-8 \cos t_0} = -\frac{1}{4},$$

то

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{-\frac{1}{4} - 1}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 1} \right| = \frac{5/4}{3/4} = \frac{5}{3}$$

и $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{5}{3}$.

Упражнение 7.15. Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются графики функций.

1. $f_1(x) = x - x^3$, $f_2(x) = 5x$.

(Ответ: $O(0; 0)$; $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$).

2. $f_1(x) = \sqrt{2} \sin x$, $f_2(x) = \sqrt{2} \cos x$.

(Ответ: $M\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; (-1)^k\right)$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$).

3. $x^2 + y^2 = 5$ и $y^2 = 4x$.

(Ответ: $M_1(1; 2)$, $M_2(1; -2)$; $\varphi = \operatorname{arctg} 3$).

4. $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$ и $y = x + 1$.

(Ответ: $M(1; 2)$; $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{6}{5}$).

5. $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t \end{cases}$ и $3x - 2y = 0$.

(Ответ: $M_1\left(\sqrt{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_2\left(-\sqrt{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$).

Упражнение 7.16. Определить угол между левой и правой полукасательными к графику функции $f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$.

1. $y = |x|$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. (Ответ: $\varphi = \frac{\pi}{2}$).

2. $y = x^{2/3}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. (Ответ: $\varphi = 0$).

3. $y = \sqrt{3x^3 + 4x^2}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. (Ответ: $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$).

4. $y = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

(Ответ: $\varphi = \frac{3\pi}{4}$).

7.8.2. Правило Лопиталья вычисления пределов функций

При раскрытии неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ во многих случаях весьма эффективно так называемое *правило Лопиталья*, состоящее в замене отношения функций отношением их производных.

Пусть выполняются следующие условия:

1) функции f и g дифференцируемы в проколотовой окрестности $\dot{U}(x_0)$ точки x_0 (x_0 может быть как конечным числом, так и символом ∞);

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$);

3) $g'(x) \neq 0$ на $\dot{U}(x_0)$.

Тогда если существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, конечный или бесконечный, то существует и предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и они равны.

Таким образом, при указанных условиях

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример 7.54. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin^2 x}{x + x^3 - x^4}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin^2 x}{x + x^3 - x^4} &= \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{ правило Лопиталья} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x - \sin^2 x)'}{(x + x^3 - x^4)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x - 2 \sin x \cos x}{1 + 3x^2 - 4x^3} = 2. \end{aligned}$$

Пример 7.55. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \operatorname{arctg} 2x}{\sin x^3}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \operatorname{arctg} 2x}{\sin x^3} = \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{ замена эквивалентными} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \operatorname{arctg} 2x}{x^3} = \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{ правило Лопиталья} \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{2}{1+4x^2}}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2(1+4x^2)} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Пример 7.56. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x^3 - x} - 2x}{\sqrt[5]{x^2} - 1}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x^3 - x} - 2x}{\sqrt[5]{x^2} - 1} &= \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{ правило Лопиталья} \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{15x^2 - 1}{2\sqrt{5x^3 - x}} - 2}{\frac{2}{5}x^{-3/5}} = \frac{\frac{14}{4} - 2}{\frac{2}{5}} = \frac{15}{4}.
\end{aligned}$$

Пример 7.57. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^2}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^2}{\sqrt[3]{x}} &= \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{ правило Лопиталья} \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = 6 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1/3}} = 0.
\end{aligned}$$

Правило Лопиталья можно использовать и при нахождении односторонних пределов ($x \rightarrow x_0 - 0$, $x \rightarrow x_0 + 0$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$). Тогда условия 1) 3) должны выполняться на соответствующих промежутках: $(x_0 - a; x_0)$, $(x_0; x_0 + a)$, $a > 0$; $(-\infty; a)$, $(a; +\infty)$.

Пример 7.58. Найти $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\ln \operatorname{tg} x}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\ln \operatorname{tg} x} &= \left[\left(\frac{\infty}{\infty} \right), \text{ правило Лопиталя} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\operatorname{tg} x \cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \cos^2 x = 1.\end{aligned}$$

Пример 7.59. Найти $\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{\ln(2x+5)}{\sqrt{x^2-x-6}}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{\ln(2x+5)}{\sqrt{x^2-x-6}} &= \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{ правило Лопиталя} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{\frac{2}{2x+5}}{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-6}}} = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{4\sqrt{x^2-x-6}}{(2x+5)(2x-1)} = 0.\end{aligned}$$

В некоторых случаях при нахождении пределов к цели приводит многократное применение правила Лопиталя.

Пример 7.60. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 4x + 3}{4x^3 - 9x^2 + 6x - 1}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 4x + 3}{4x^3 - 9x^2 + 6x - 1} &= \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{ правило Лопиталя} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 4}{12x^2 - 18x + 6} = \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{ правило Лопиталя} \right] = \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{4x - 3} = 2.\end{aligned}$$

Внимание! Целесообразно до использования правила Лопиталя предварительно заменить по возможности некоторые множители в числителе и знаменателе эквивалентными степенного вида или числами, не равными нулю (см. таблицу основных эквивалентностей, § 5.13), что существенно упрощает вычисления.

Пример 7.61. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} &= \left[\left(\frac{0}{0} \right), \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x} \text{ при } x \rightarrow +\infty \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{правило Лопиталя} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \left[1 + x^2 \sim x^2 \text{ при } x \rightarrow +\infty \right] = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 2. \end{aligned}$$

Пример 7.62. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{\sin^3 2x}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{\sin^3 2x} &= \left[\left(\frac{0}{0} \right), \sin^3 2x \sim 8x^3, \ x \rightarrow 0 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{8x^3} = \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{правило Лопиталя} \right] = \\ &= \frac{1}{8} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-4x^2}}{x^2 \sqrt{1-4x^2} \cdot \sqrt{1-x^2}} = \\ &= \left[\left(\frac{0}{0} \right), \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x^2} = 1, \ \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-4x^2} = 1 \right] = \\ &= \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-4x^2}}{x^2 \cdot 1 \cdot 1} = \\ &= \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{умножим на сопряженное выражение} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + 4x^2}{x^2 (\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-4x^2})} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{8}.$$

Пример 7.63. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x^2} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x^2} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi} = \left[\left(\frac{0}{0} \right), \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty \Rightarrow e^{1/x^2} - 1 \sim \frac{1}{x^2} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi} = \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{ правило Лопиталя} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{x^3}}{\frac{4x}{1+x^4}} = -\frac{2}{4} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^4}{x^4} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 7.64. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^x - 2^x}{\operatorname{sh} x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^x - 2^x}{\operatorname{sh} x^2} = \left[\left(\frac{0}{0} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \left(\left(1 + \frac{x}{2} \right)^x - 1 \right)}{\operatorname{sh} x^2} =$$

$$= \left[\left(\frac{0}{0} \right), 2^x \rightarrow 1, \operatorname{sh} x^2 \sim x^2 \text{ при } x \rightarrow 0, a^{\log_a b} = b \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(1 + \frac{x}{2})} - 1}{x^2} = \left[\left(\frac{0}{0} \right), x \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0 \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow e^{x \ln(1 + \frac{x}{2})} - 1 \sim x \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right) \sim x \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2} \left. \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

При раскрытии неопределенностей вида $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$ правило Лопиталя можно использовать, если соответствующие

выражения предварительно преобразовать к виду $\frac{0}{0}$ либо $\frac{\infty}{\infty}$.
От выбора неопределенности $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ иногда зависит эффективность использования самого правила.

Пример 7.65. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} \frac{x+1}{x+2} - \frac{\pi}{4} \right)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} \frac{x+1}{x+2} - \frac{\pi}{4} \right) &= [(\infty \cdot 0)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x+1}{x+2} - \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{x}} = \\ &= \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{ правило Лопиталя} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^2} \cdot \frac{1}{(x+2)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x+1)^2 + (x+2)^2} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 + 6x + 5} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 7.66. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right) &= [(\infty - \infty)] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - e^x + 1}{(e^x - 1) \sin x} = \\ &= \left[\left(\frac{0}{0} \right), e^x - 1 \sim x, \sin x \sim x \text{ при } x \rightarrow 0 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - e^x + 1}{x^2} = \\ &= \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{ правило Лопиталя} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^x}{2x} = \\ &= \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{ правило Лопиталя} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - e^x}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

При нахождении пределов вида $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$ в случае наличия неопределенностей 1^∞ , 0^0 , ∞^0 целесообразно записать исходное выражение через экспоненту:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)},$$

что приводит к раскрытию неопределенности вида $(0 \cdot \infty)$ в показателе.

Пример 7.67. Найти $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x} &= (0^0) = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} \sin x \ln x} = \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow +0} \sin x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1/x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \right. \\ &\quad \left. = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0 \right] = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Пример 7.68. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \ln(2-x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \ln(2-x)} = \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \ln(2-x) = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x) \sin \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \right. \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi x}{2} = 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{ правило Лопиталя} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1/(2-x)}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi} \Big] = e^{2/\pi}. \end{aligned}$$

Заметим, что в этом примере значение предела $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{\cos \frac{\pi x}{2}}$

можно вычислить, используя только замену эквивалентными:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+(1-x))}{\sin \frac{\pi}{2}(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\frac{\pi}{2}(1-x)} = \frac{2}{\pi}.$$

Пример 7.69. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch} x)^{\operatorname{cth}^2 x}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch} x)^{\operatorname{cth}^2 x} &= \left[(1^\infty) \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{cth}^2 x \ln(\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch} x)} = \\&= \left[\operatorname{cth}^2 x = \frac{1}{\operatorname{th}^2 x} \sim \frac{1}{x^2} \text{ при } x \rightarrow 0 \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch} x)}{x^2}} = \\&= \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch} x)}{x^2} = \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{ правило Лопиталя} \right] = \right. \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{(\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch} x) 2x} = \left[\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch} x \rightarrow 1, \operatorname{sh} x \sim x, \right. \\&\left. 2 \operatorname{ch} x + 1 \rightarrow 3 \text{ при } x \rightarrow 0 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 3}{2x} = \frac{3}{2} \Big] = e^{3/2}.\end{aligned}$$

Использование правила Лопиталя позволяет установить справедливость следующих результатов:

- 1) $\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha \ln x = 0$, $\alpha > 0$, в частности $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = 0$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^p x}{x^\beta} = 0$, $\beta > 0$, $p \in \mathbb{R}$, в частности $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\beta} = 0$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1$.

В заключение отметим следующее.

1. Правило Лопиталя можно применять только к неопределенным выражениям вида $\frac{0}{0}$ либо $\frac{\infty}{\infty}$.

2. Не всегда можно вычислить предел, используя только правило Лопиталя. Например, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует, еще не следует, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ не существует.

3. Правило Лопиталя не самоцель, а лишь один из приемов правильного и быстрого нахождения пределов наряду и в сочетании с элементарными подходами, заменой эквивалентными и т. д.

Пример 7.70. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{\sin^2 x}$.

Решение. Применяя формально правило Лопиталья, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \sin \frac{1}{x} + x^3 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{2 \sin x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right)}{2 \sin x \cos x} = \left[\sin x \sim x, \cos x \rightarrow 1 \text{ при } x \rightarrow 0 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right)}{2 \cdot x \cdot 1} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right) = \\ &= \left[x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0 \text{ как произведение бесконечно малой} \right. \\ &\quad \left. \text{на ограниченную} \right] = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Но $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ не существует, следовательно, не существует $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. А это означает, что правило Лопиталья не работает. Тем не менее

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{\sin^2 x} &= \left[\sin^2 x \sim x^2 \text{ при } x \rightarrow 0 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

Замечание. Критерий Гейне существования предела функции иногда позволяет применить правило Лопиталья и при нахождении пределов последовательностей.

Пример 7.71. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} n \right)$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x \ln \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)$ для $x > 0$ и вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right) &= \left[(\infty \cdot 0) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)}{1/x} = \\ &= \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{ правило Лопиталья} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{arctg} x} \frac{1}{1+x^2}}{-1/x^2} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x} = -\frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Тогда на основании критерия Гейне и $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} n \right) = -\frac{2}{\pi}$.

Пример 7.72. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^\beta n}{n^\alpha}$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha}$ и вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} &= \left[\left(\frac{\infty}{\infty} \right), \text{ правило Лопиталья} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta \ln^{\beta-1} x}{\alpha x^\alpha} = \\ &= \left[\text{если } \beta - 1 \leq 0, \text{ то нет неопределенности и предел равен нулю,} \right. \\ &\quad \left. \text{если } \beta - 1 > 0, \text{ то снова применим правило Лопиталья} \right] = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta(\beta-1) \ln^{\beta-2} x}{\alpha^2 x^\alpha}.$$

Если окажется, что $\beta - 2 \leq 0$, то предел равен нулю, если же $\beta - 2 > 0$, то опять применим правило Лопиталья. За некоторое число шагов придем к ситуации, когда показатель степени логарифма будет неположительным и, следовательно, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0$.

Критерий Гейне позволяет сделать вывод, что и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^\beta n}{n^\alpha} = 0$.

Упражнение 7.17. Найти пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{2x^2 - 7x - 4}{3 + 5x - 2x^2}.$ (Ответ: $-9/7$).

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}.$ (Ответ: $25/9$).

3. $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg} \pi x}.$ (Ответ: 0).

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \ln x - x}{\cos(x-1) - 1}.$ (Ответ: 1).

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{4}{1-x^4} \right).$ (Ответ: $-1/2$).

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \cos \frac{2}{x}.$ (Ответ: -2).

7.9. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

7.9.1. Представление функций по формуле Тейлора

Пусть функция f определена в окрестности точки x_0 и имеет в этой точке n конечных производных. Тогда представление

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

называется *формулой Тейлора для функции f в окрестности точки x_0* . Многочлен

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется n -м многочленом Тейлора, $R_n(x)$ — остаточным членом.

Остаточный член в форме Пеано имеет вид

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0.$$

Представление функции

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

называется *формулой Тейлора Пеано в окрестности точки* x_0 .

Если $x_0 = 0$, то представление функции

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

называется *формулой Маклорена Пеано в окрестности точки* 0.

Основные разложения по формуле Маклорена Пеано:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n),$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) = -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n) = \\ = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}x^k + o(x^n),$$

в частности

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n), \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n).$$

Пример 7.73. Разложить по формуле Тейлора Пеано в окрестности заданной точки x_0 следующие функции $f(x)$ до $o((x - x_0)^n)$.

1. $f(x) = e^{\frac{1}{2}x+2}$, $x_0 = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой Маклорена Пеано для функции e^x . Имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= e^2 e^{\frac{1}{2}x} = e^2 \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^k}{k!} + o(x^n) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{e^2}{2^k k!} x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{e^2}{(2k)!!} x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

2. $f(x) = \ln(5 - 4x)$, $x_0 = 0$.

Решение. Преобразуем функцию

$$f(x) = \ln(5 - 4x) = \ln\left(5\left(1 - \frac{4}{5}x\right)\right) = \ln 5 + \ln\left(1 - \frac{4}{5}x\right)$$

и воспользуемся формулой Маклорена Пеано для $\ln(1 - x)$. Получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(5 - 4x) = \ln 5 - \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^k}{k} x^k + o(x^n) = \\ &= \ln 5 - \sum_{k=1}^n \frac{4^k}{5^k \cdot k} x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

3. $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = 0$.

Решение. Поскольку $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$ и $\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$, то

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}). \end{aligned}$$

$$4. f(x) = \frac{1}{2x+3}, \quad x_0 = 1.$$

Решение. По условию задачи разложение должно быть по степеням $x-1$. Для этого преобразуем $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2x+3} = \frac{1}{2((x-1)+1)+3} = \frac{1}{2(x-1)+5} = \frac{1}{5\left(1+\frac{2}{5}(x-1)\right)} = \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{1+\frac{2}{5}(x-1)} = \left[\text{применим формулу } \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \right] = \\ &= \frac{1}{5} \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{2}{5}(x-1)\right)^k + o((x-1)^n) = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2^k}{5^k} (x-1)^k + \\ &\quad + o((x-1)^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2^k}{5^{k+1}} (x-1)^k + o((x-1)^n). \end{aligned}$$

$$5. f(x) = e^x, \quad x_0 = -2.$$

Решение. Поскольку $f(x) = e^{(x+2)-2}$, то

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-2} e^{(x+2)} = e^{-2} \sum_{k=0}^n \frac{(x+2)^k}{k!} + o((x+2)^n) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{e^{-2}}{k!} (x+2)^k + o((x+2)^n). \end{aligned}$$

$$6. f(x) = \ln \frac{3+x}{2-x}, \quad x_0 = 0.$$

Решение. Поскольку $f(x) = \ln \left(\frac{3}{2} \frac{1+\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{2}} \right)$, то

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \frac{3}{2} + \ln \left(1 + \frac{x}{3} \right) - \ln \left(1 - \frac{x}{2} \right) = \\ &= \left[\text{используем разложения } \ln(1+x) \text{ и } \ln(1-x) \right] = \\ &= \ln \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x/3)^k}{k} + o(x^n) - \sum_{k=1}^n \frac{(x/2)^k}{k} + o(x^n) = \\ &= \ln \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{(-1)^{k-1}}{3^k \cdot k} - \frac{1}{2^k \cdot k} \right) x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

$$7. f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-12}, \quad x_0 = 0.$$

Решение. Преобразуем $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x+1}{x^2+x-12} = \frac{2x+1}{(x+4)(x-3)} = \left[\frac{a}{x+4} + \frac{b}{x-3} = f(x) \Rightarrow \right. \\ &\Rightarrow a(x-3)+b(x+4) = 2x+1; \text{ при } x=3 \Rightarrow b=1; \text{ при } x=-4 \Rightarrow \\ &\quad \left. \Rightarrow a=1 \right] = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{x}{4}} - \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{3}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{4^k} x^k - \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} x^k + o(x^n) = \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3^{k+1}} - \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} \right) x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

Упражнение 7.18. Разложить по формуле Тейлора Пеано следующие функции.

$$1. f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \text{ до } o(x^n).$$

$$(\text{Ответ: } 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{2^k \cdot k!} x^k + o(x^n)).$$

$$2. f(x) = \frac{1}{3x+4} \text{ до } o(x^n). \quad (\text{Ответ: } \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 3^k}{4^k} x^k + o(x^n)).$$

$$3. f(x) = \ln(x^2 + 3x + 2) \text{ до } o(x^n).$$

$$(\text{Ответ: } \ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(1 + \frac{1}{2^k} \right) x^k + o(x^n)).$$

$$4. f(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{3} \text{ до } o(x^{2n}). \quad \text{Указание: } \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$(\text{Ответ: } \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{3^{2k+1} (2k+1)!} + o(x^{2n})).$$

$$5. f(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} \text{ до } o(x^{2n+1}).$$

$$(\text{Ответ: } \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n ((-1)^{k+1} - 1)x^{2k} + o(x^{2n+1})).$$

$$6. f(x) = \frac{1}{x} \text{ до } o((x-2)^n).$$

$$(\text{Ответ: } \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} (x-2)^k + o((x-2)^n)).$$

Пример 7.74. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ до $o(x)^5$.

Решение.

Первый способ. Применим формулу Маклорена Пеано:

$$\begin{aligned} f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \\ + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Вычислим значение $f^{(k)}(0)$, $k = \overline{1, 5}$:

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y(0) = 0;$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + y^2, \quad y'(0) = 1;$$

$$y'' = 2yy', \quad y''(0) = 0;$$

$$y''' = 2y'^2 + 2yy'', \quad y'''(0) = 2;$$

$$y^{(4)} = 6y'y'' + 2yy''', \quad y^{(4)}(0) = 0;$$

$$y^{(5)} = 6y'' + 8y'y''' + 2yy^{(4)}, \quad y^{(5)}(0) = 16.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + o(x^5) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

Второй способ. Так как функция $\operatorname{tg} x$ нечетная, то разложение будет только по нечетным степеням:

$$\operatorname{tg} x = a_1x + a_2x^3 + a_3x^5 + o(x^5).$$

Поскольку $\operatorname{tg} x = x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$, то

$$\operatorname{tg} x = x + a_2x^3 + a_3x^5 + o(x^5).$$

Далее, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Следовательно,

$$\sin x = \operatorname{tg} x \cos x = (x + a_2 x^3 + a_3 x^5 + o(x^5)) \cos x$$

и

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) = (x + a_2 x^3 + a_3 x^5 + o(x^5)) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right).$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при x^3 и x^5 , найдем

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{5!} = a_3 - \frac{a_2}{2!} + \frac{1}{4!} \Rightarrow a_3 = \frac{2}{15}.$$

$$\text{Итак, } \operatorname{tg} x = x + \frac{2}{3!} x^3 + \frac{16}{5!} x^5 + o(x^5) = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5).$$

Упражнение 7.19. Разложить по формуле Маклорена Пеано до $o(x^n)$ следующие функции.

$$1. \quad f(x) = e^{\sqrt{1+2x}}, \quad n = 2. \quad (\text{Ответ: } e + ex + o(x^2)).$$

$$2. \quad f(x) = \operatorname{ch}(\sin x), \quad n = 2. \quad (\text{Ответ: } 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)).$$

$$3. \quad f(x) = e^{\sin x}, \quad n = 3. \quad (\text{Ответ: } 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)).$$

$$4. \quad f(x) = \ln^3\left(1 - \frac{x}{2}\right), \quad n = 3. \quad (\text{Ответ: } -\frac{1}{8}x^3 + o(x^3)).$$

7.9.2. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора Пеано

При вычислении пределов для выделения главных частей степенного вида и замены выражений эквивалентными им функциями можно использовать известные разложения по формуле Тейлора Пеано.

Пусть требуется вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(0) = g(0) = 0$. Предполагая, что функции f и g можно разложить по формуле Маклорена Пеано в окрестности точки $x = 0$, ограничимся первыми отличными от нуля членами в разложении этих функций:

$$f(x) = ax^n + o(x^n), \quad a \neq 0;$$

$$g(x) = bx^m + o(x^m), \quad b \neq 0.$$

1. Если $n = m$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^n + o(x^n)}{bx^n + o(x^n)} = \frac{a}{b}$.
2. Если $n > m$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
3. Если $n < m$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Замечание. При вычислении предела $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x_0) = g(x_0) = 0$, можно воспользоваться формулой Тейлора Пеано в окрестности точки x_0 , а можно сделать замену $x - x_0 = t$ и применить затем формулу Маклорена Пеано.

Приведем список разложений некоторых элементарных функций по формуле Маклорена Пеано до членов с x^5 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5),$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5),$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{24}x^4 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{120}x^5 + o(x^5),$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + o(x^5),$$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \frac{22}{729}x^5 + o(x^5),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5),$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5),$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + o(x^5),$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5),$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5),$$

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5),$$

$$\ln(x + \sqrt{1-x^2}) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5),$$

$$\ln \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5),$$

$$\ln \frac{\sin x}{x} = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^5).$$

При решении конкретных примеров сначала следует прикинуть, члены какого порядка будут влиять на результат вычислений, и в разложении ограничиться формулой Маклорена Пеано соответствующего порядка. Технику и приемы работы можно почерпнуть из приведенных примеров.

Пример 7.75. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 - 2x + 2 \ln(1+x)}$.

Решение. Полагаем $f(x) = x - \sin x$, $f(0) = 0$; $g(x) = x^2 - 2x + 2 \ln(1+x)$, $g(0) = 0$. Используя разложения по формуле Маклорена Пеано для $\sin x$ и $\ln(1+x)$, получим

$$f(x) = x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right) = \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0;$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 2 \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 - 2x + 2 \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{6} : \frac{2}{3} = \frac{1}{4}.$$

Пример 7.76. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\ln^2(1+x) + 1 - \cos 2x}$.

Решение. Полагаем

$$f(x) = x \sin x = x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0;$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln^2(1+x) + 1 - \cos 2x = \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^2 + 1 - \\ &- \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + o(x^2) \right) = x^2 + 1 - 1 + 2x^2 + o(x^2) = 3x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\ln^2(1+x) + 1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{3x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{3}.$$

Пример 7.77. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2}}{\sqrt[5]{1+5x} - 1 - x}$.

Решение. Полагаем

$$\begin{aligned} f(x) = \cos x - e^{-x^2} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = \\ &= \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) = (1+5x)^{1/5} - 1 - x &= 1 + \frac{1}{5}(5x) + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)}{2}(5x)^2 + o(x^2) - 1 - x = \\ &= \frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot 25}{2}x^2 + o(x^2) = -2x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2}}{\sqrt[5]{1+5x} - 1 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{-2x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{4}.$$

Пример 7.78. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x-x^2)}{\cos 2x - \cos \frac{x}{2}}$.

Решение. Полагаем

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x+x^2) + \ln(1+(-x-x^2)) = \\ &= (x+x^2) - \frac{(x+x^2)^2}{2} + o((x+x^2)^2) + (-x-x^2) - \frac{(x+x^2)^2}{2} + o((x+x^2)^2) = \\ &= -(x+x^2)^2 + o((x+x^2)^2) = -x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) = \cos 2x - \cos \frac{x}{2} &= 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) - \left(1 - \frac{(x/2)^2}{2} + o(x^2)\right) = \\ &= 1 - 2x^2 + o(x^2) - 1 + \frac{x^2}{8} + o(x^2) = -\frac{15}{8}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x-x^2)}{\cos 2x - \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{-\frac{15}{8}x^2 + o(x^2)} = \frac{8}{15}.$$

Пример 7.79. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{\arcsin x - \sin x}$.

Решение. Полагаем

$$f(x) = x(e^x - 1) \sim x^2 \Rightarrow f(x) = x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0;$$

$$g(x) = \arcsin x - \sin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{\arcsin x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = [n=2, \quad m=3, \quad n < m] = \infty.$$

Пример 7.80. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{x^2}$.

Решение. Полагаем

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{arctg} x - \arcsin x = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2} = [n=3, \quad m=2, \quad n > m] = 0.$$

Пример 7.81. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{\sin x^3}$.

Решение. Полагаем

$$g(x) = \sin x^3 \sim x^3 \Rightarrow g(x) = x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0;$$

$$\begin{aligned} \sin(\sin x) &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{6} + o(\sin^3 x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \\ &- \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3); \end{aligned}$$

$$x\sqrt[3]{1-x^2} = x(1-x^2)^{1/3} = x\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3);$$

$$f(x) = \sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2} = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = o(x^3).$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{\sin x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0.$$

Пример 7.82. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}) &= \\ &= \left[\text{вынесем } \sqrt{x} \text{ за скобки} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 2 \right) = \\ &= \left[\text{сделаем замену } 1/x = t, \quad x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +0 \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(1+t)^{1/2} + (1-t)^{1/2} - 2}{t^2} = \\ &= \left[\text{полагаем } f(t) = (1+t)^{1/2} + (1-t)^{1/2} - 2 = 1 + \frac{1}{2}t + \right. \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{t^2}{2} + o(t^2) + 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{t^2}{2} + o(t^2) - 2 = -\frac{1}{4}t^2 + o(t^2) \left. \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{4}t^2 + o(t^2)}{t^2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Пример 7.83. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - \sin(x-1) - 2\cos(x-1)}{\operatorname{arctg}(x-1) - \ln x}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - \sin(x-1) - 2\cos(x-1)}{\operatorname{arctg}(x-1) - \ln x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\text{замена } x-1=t, \quad x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 0 \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+t} - \sin t - 2 \cos t}{\operatorname{arctg} t - \ln(1+t)} = \\
&= \left[\text{полагаем } f(t) = 2(1+t)^{1/2} - \sin t - 2 \cos t = \right. \\
&= 2 \left(1 + \frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)}{2} t^2 + o(t^2) \right) - (t + o(t^2)) - 2 \left(1 - \frac{t^2}{2!} + o(t^2) \right) = \\
&= 2 + t - \frac{1}{4}t^2 + o(t^2) - t + o(t^2) - 2 + t^2 + o(t^2) = \frac{3}{4}t^2 + o(t^2), \\
&g(t) = \operatorname{arctg} t - \ln(1+t) = t + o(t^2) - \left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right) = \\
&= \frac{t^2}{2} + o(t^2) \left. \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{4}t^2 + o(t^2)}{\frac{1}{2}t^2 + o(t^2)} = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Пример 7.84. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x} = (1^\infty) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg}^2 x \ln \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg}^2 x \ln \left(\frac{\arcsin x}{x} \right) = \left[\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \sim \frac{1}{x^2}, \quad x \rightarrow 0; \right. \\
&\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4); \quad \left. \frac{\arcsin x}{x} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)}{x^2} = \left[\ln \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) = \frac{x^2}{6} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0 \right] =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{6} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{6}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x} = e^{1/6}.$$

Пример 7.85. Найти $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\sqrt[3]{4-x} + \ln \frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{\sin^2(x-3)}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 3} \left(\sqrt[3]{4-x} + \ln \frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{\sin^2(x-3)}} = \\ &= \left[\text{замена } x-3=t, \quad x=t+3; \quad x \rightarrow 3 \Rightarrow t \rightarrow 0 \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\sqrt[3]{1-t} + \ln \left(1 + \frac{t}{3} \right) \right)^{\frac{1}{\sin^2 t}} = (1^\infty) = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 t} \ln \left(\sqrt[3]{1-t} + \ln \left(1 + \frac{t}{3} \right) \right)}. \end{aligned}$$

Вычислим отдельно предел показателя:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sqrt[3]{1-t} + \ln \left(1 + \frac{t}{3} \right) \right)}{\sin^2 t} = \\ &= \left[\sin^2 t = t^2 + o(t^2), \quad \sqrt[3]{1-t} + \ln \left(1 + \frac{t}{3} \right) = (1-t)^{1/3} + \ln \left(1 + \frac{t}{3} \right) = \right. \\ &= \left. 1 - \frac{1}{3}t + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right)}{2} t^2 + o(t^2) + \frac{t}{3} - \frac{(t/3)^2}{2} + o(t^2) = 1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^2) \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \left(-\frac{1}{6}t^2 + o(t^2) \right) \right)}{t^2 + o(t^2)} = \end{aligned}$$

$$= \left[\ln \left(1 + \left(-\frac{1}{6}t^2 + o(t^2) \right) \right) \right] \sim -\frac{1}{6}t^2 + o(t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}t^2 + o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} = -\frac{1}{6}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\sqrt[3]{4-x} + \ln \frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{\sin^2(x-3)}} = e^{-1/6}.$$

Упражнение 7.20. Найти пределы.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x + x^2 - e^{-x} \cos x}{x \sin x + \ln(1 + x^2)}. \quad (\text{Ответ: } 1/2).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2x)^{3/2} - 1 - \sin 3x}{\cos 2x - \operatorname{ch} 4x}. \quad (\text{Ответ: } -3/20).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin x} - \frac{x}{1 - \cos x} \right). \quad (\text{Ответ: } 0).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - (x-1)\sqrt{x} - 1}{\sin(x-1) \operatorname{ch}(x-1) - \operatorname{sh}(x-1)}. \quad (\text{Ответ: } 7/4).$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2/x} - \operatorname{ch} \frac{2}{x} - \frac{2}{x}}{\operatorname{tg} \frac{2}{x} - \sin \frac{2}{x}}. \quad (\text{Ответ: } 1/3).$$

Задачи для индивидуальных и контрольных заданий

7.1. Используя определение производной, вычислить $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

$$1. f(x) = 3|x + 4|, \quad x_0 = 3. \quad (\text{Ответ: } 3).$$

$$2. f(x) = \sqrt{x+1}, \quad x_0 = 2. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{2\sqrt{3}}).$$

$$3. \quad f(x) = 2 + \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{2}).$$

$$4. \quad f(x) = \frac{1}{x+4}, \quad x_0 = -1. \quad (\text{Ответ: } -\frac{1}{9}).$$

$$5. \quad f(x) = 2^{x+1}, \quad x_0 = 3. \quad (\text{Ответ: } 16 \ln 2).$$

$$6. \quad f(x) = 2 \cos 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}. \quad (\text{Ответ: } -4).$$

$$7. \quad f(x) = 2x + \operatorname{ctg} x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}. \quad (\text{Ответ: } 0).$$

$$8. \quad f(x) = 4 + 3 \ln 2x, \quad x_0 = 1. \quad (\text{Ответ: } 3).$$

$$9. \quad f(x) = 2|x+5|, \quad x_0 = -7. \quad (\text{Ответ: } -2).$$

$$10. \quad f(x) = 2x^2 + 3x - 4, \quad x_0 = -2. \quad (\text{Ответ: } -5).$$

$$11. \quad f(x) = \sqrt{x} - \ln \sqrt{x}, \quad x_0 = 4. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{8}).$$

$$12. \quad f(x) = \frac{3x-1}{x+3}, \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } \frac{10}{9}).$$

$$13. \quad f(x) = 16x + \sin 5x, \quad x_0 = \frac{\pi}{10}. \quad (\text{Ответ: } 16).$$

$$14. \quad f(x) = \sqrt[3]{x-9}, \quad x_0 = 1. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{12}).$$

$$15. \quad f(x) = 3^{x-2}, \quad x_0 = 3. \quad (\text{Ответ: } 3 \ln 3).$$

$$16. \quad f(x) = 3x + \operatorname{tg} x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}. \quad (\text{Ответ: } 5).$$

7.2. Используя определение производной, найти $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

$$1. \quad f(x) = 4x^2 - 7x + 5. \quad (\text{Ответ: } 8x - 7).$$

$$2. \quad f(x) = x + \ln 3x. \quad (\text{Ответ: } 1 + \frac{1}{x}).$$

3. $f(x) = e^{2x}$. (Ответ: $2e^{2x}$).
4. $f(x) = 3 \sin 4x$. (Ответ: $12 \cos 4x$).
5. $f(x) = \cos 5x$. (Ответ: $-5 \sin 5x$).
6. $f(x) = x + \sqrt{x}$. (Ответ: $1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$).
7. $f(x) = x^2 + 3x$. (Ответ: $2x + 3$).
8. $f(x) = \frac{1}{2x+1}$. (Ответ: $-\frac{2}{(2x+1)^2}$).
9. $f(x) = 3^{2x+1}$. (Ответ: $2 \cdot 3^{2x+1} \ln 3$).
10. $f(x) = \sin^2 2x$. (Ответ: $2 \sin 4x$).
11. $f(x) = x + \sqrt{4x+1}$. (Ответ: $1 + \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$).
12. $f(x) = \frac{2x+1}{3x-2}$. (Ответ: $-\frac{7}{(3x-2)^2}$).
13. $f(x) = 3x^3 + 5x + 1$. (Ответ: $9x^2 + 5$).
14. $f(x) = 4x^2 + e^{4x}$. (Ответ: $8x + 4e^{4x}$).
15. $f(x) = 3x + 2 \sin \frac{x}{2}$. (Ответ: $3 + \cos \frac{x}{2}$).
16. $f(x) = x + e^{-x}$. (Ответ: $1 - e^{-x}$).

7.3. Пользуясь таблицей производных, вычислить $f'(x_0)$.

1. $f(x) = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x$, $x_0 = 0$. (Ответ: 0).
2. $f(x) = x^5 e^{-x}$, $x_0 = 3$. (Ответ: $162e^{-3}$).
3. $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$, $x_0 = -3$. (Ответ: 2).
4. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x_0 = 1$. (Ответ: $\frac{1}{2}$).

5. $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}, \quad x_0 = e. \quad (\text{Ответ: } e).$
6. $f(x) = x(\operatorname{arctg} x + 1), \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } 1).$
7. $f(x) = e^{2x} \cos 4x, \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } 2).$
8. $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}. \quad (\text{Ответ: } 2).$
9. $f(x) = (x^2 + x + 2)^{3/2}, \quad x_0 = 1. \quad (\text{Ответ: } 9).$
10. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad x_0 = 1. \quad (\text{Ответ: } 1).$
11. $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}. \quad (\text{Ответ: } 1).$
12. $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \quad x_0 = 2. \quad (\text{Ответ: } -\frac{1}{\sqrt{3}}).$
13. $f(x) = (x+1)^3 \operatorname{ch} x + \operatorname{sh}(x+1), \quad x_0 = -1. \quad (\text{Ответ: } 1).$
14. $f(x) = x^2 \cos x + 3x \sin x + 2x, \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } 2).$
15. $f(x) = (x+1)(x+2)x(x-3), \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } -6).$
16. $f(x) = (2x^2 + 3x + 1)\operatorname{sh} 3x, \quad x_0 = 0. \quad (\text{Ответ: } 3).$

7.4. Найти производные функций.

1. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}).$
2. $f(x) = \frac{3}{5}x^{5/3} + x^{-2} + \frac{2}{x}. \quad (\text{Ответ: } \sqrt[3]{x^2} - 2x^{-3} - 2x^{-2}).$
3. $f(x) = 5x \cos 2x + \sin 3. \quad (\text{Ответ: } 5 \cos 2x - 10x \sin 2x).$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt[3]{x^2}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{6 - \sqrt[3]{x^2}}{6\sqrt{x}(2 + \sqrt[3]{x^2})^2}).$
5. $f(x) = (2x+1) \operatorname{tg} 2x. \quad (\text{Ответ: } 2 \operatorname{tg} 2x + \frac{2(2x+1)}{\cos^2 2x}).$

6. $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x + 7}$. (ОТВЕТ: $\frac{6x^2 + 2x - 41}{(x^2 + x + 7)^2}$).
7. $f(x) = x \arcsin 2x$. (ОТВЕТ: $\arcsin 2x + \frac{2x}{\sqrt{1 - 4x^2}}$).
8. $f(x) = \log_x 2 + \log_2 x$. (ОТВЕТ: $-\frac{\ln 2}{x \ln^2 x} + \frac{1}{x \ln 2}$).
9. $f(x) = \operatorname{sh} 2x \operatorname{ch} 2x$. (ОТВЕТ: $2 \operatorname{ch} 4x$).
10. $f(x) = x \ln 2x + e^{-2x}$. (ОТВЕТ: $1 + \ln 2x - 2e^{-2x}$).
11. $f(x) = \lg(x \sin^2 x^3)$. (ОТВЕТ: $\frac{\sin x^3 + 6x^3 \cos x^3}{x \sin x^3 \ln 10}$).
12. $f(x) = \sqrt{2x} + \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}$. (ОТВЕТ: $\frac{\sqrt{2x} + 2\sqrt{x} + 1}{2x\sqrt{x}}$).
13. $f(x) = \ln^2 3x - \ln \ln 3x$. (ОТВЕТ: $\frac{2 \ln^2 3x - 1}{x \ln 3x}$).
14. $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \ln(\cos x) + \operatorname{tg} x - x$. (ОТВЕТ: $\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}$).
15. $f(x) = 2^{\operatorname{ctg}(1/x)}$. (ОТВЕТ: $\frac{2^{\operatorname{ctg}(1/x)} \ln 2}{x^2 \sin^2(1/x)}$).
16. $f(x) = \ln(\sqrt{1+e^{-x}}-1)$. (ОТВЕТ: $-\frac{e^{-x}}{2\sqrt{1+e^{-x}}(\sqrt{1+e^{-x}}-1)}$).
17. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2\sqrt{1-x^4}}$. (ОТВЕТ: $\frac{2x^3 + x}{(1-x^4)^{3/2}}$).
18. $f(x) = \frac{1}{\ln 4} \ln \frac{1+2^x}{1-2^x}$. (ОТВЕТ: $\frac{2^x}{1-4^x}$).
19. $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2}$. (ОТВЕТ: $\frac{e^x}{e^{2x} - 6e^x + 13}$).
20. $f(x) = e^{2x}(2 - \sin 2x - \cos 2x)$. (ОТВЕТ: $4(1 - \cos 2x)e^{2x}$).

21. $f(x) = 2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1}. \quad (\text{Ответ: } \sqrt{e^x + 1}).$
22. $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}. \quad (\text{Ответ: } \frac{5}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}).$
23. $f(x) = \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1}). \quad (\text{Ответ: } \frac{2x}{\sqrt{1 + x^4}}).$
24. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin x\right). \quad (\text{Ответ: } \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \cos 2x}}).$
25. $f(x) = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) - \cos x \ln(\operatorname{tg} x). \quad (\text{Ответ: } \sin x \ln(\operatorname{tg} x)).$
26. $f(x) = \sin \cos^2 x \cdot \cos \sin^2 x. \quad (\text{Ответ: } -\sin 2x \cdot \cos \cos 2x).$
27. $f(x) = \operatorname{arctg} 2^x. \quad (\text{Ответ: } -\frac{2^x \ln 2}{1 + 4^x}).$
28. $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left(\frac{\sqrt{2} + x\sqrt{3}}{\sqrt{2} - x\sqrt{3}}\right)^2. \quad (\text{Ответ: } \frac{2}{2 - 3x^2}).$
29. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1 + x^2} + \operatorname{arctg} \frac{\pi\sqrt{3}}{1 + \pi^2}. \quad (\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3}(1 - x^2)}{1 + 5x^2 + x^4}).$
30. $f(x) = e^{\sin x} \left(x - \frac{1}{\cos x}\right). \quad (\text{Ответ: } e^{\sin x} \left(x \cos x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)).$
31. $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin e^{-x}. \quad (\text{Ответ: } \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}).$
32. $f(x) = \frac{1}{2} e^x ((x^2 - 1) \cos x + (x - 1)^2 \sin x). \quad (\text{Ответ: } x^2 e^x \cos x).$
33. $f(x) = x + \frac{1}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x). \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{(1 + e^x)^2}).$
34. $f(x) = \frac{2}{\ln 2} (\sqrt{2^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{2^x - 1}). \quad (\text{Ответ: } \sqrt{2^x - 1}).$

$$35. f(x) = \frac{\cos^2 18x}{36 \sin 36x}. \quad (\text{OTBET: } -\frac{1}{4 \sin^2 18x}).$$

$$36. f(x) = \arccos(\sin x^4 - \cos x^4). \\ (\text{OTBET: } -\frac{4x^3(\sin x^4 + \cos x^4)}{\sqrt{\sin 2x^4}}).$$

$$37. f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right), \quad x > 0. \\ (\text{OTBET: } \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}).$$

$$38. f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{th}(x/2)}{\sqrt{3}}. \quad (\text{OTBET: } \frac{2 + \operatorname{ch} x}{1 + 2 \operatorname{ch} x}).$$

$$39. f(x) = \operatorname{th} x + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{1 + \sqrt{2} \operatorname{th} x}{1 - \sqrt{2} \operatorname{th} x}. \quad (\text{OTBET: } \frac{2}{1 - \operatorname{sh}^4 x}).$$

$$40. f(x) = x\sqrt{4 - x^2} + 4 \arcsin(x/2). \quad (\text{OTBET: } 2\sqrt{4 - x^2}).$$

$$41. f(x) = 3^{\cos^2 \sqrt{x}}. \quad (\text{OTBET: } -\frac{\ln 3}{2\sqrt{x}} \cdot 3^{\cos^2 \sqrt{x}} \sin 2\sqrt{x}).$$

$$42. f(x) = \arccos \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{OTBET: } -\frac{2nx^{n-1}}{x^{2n} + 1}).$$

$$43. f(x) = \frac{\operatorname{ch} x^2}{\operatorname{sh}^2 x^2} - \ln\left(\operatorname{cth} \frac{x^2}{2}\right). \quad (\text{OTBET: } -\frac{4x}{\operatorname{sh}^3 x^2}).$$

$$44. f(x) = \frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{2 + x^2}{9} \sqrt{1 - x^2}. \quad (\text{OTBET: } x^2 \arccos x).$$

$$45. f(x) = \frac{(1 + x) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}}{x}. \quad (\text{OTBET: } \frac{\sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{x^2}).$$

$$46. f(x) = \sqrt{1 + 2x - x^2} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1 + x} - \sqrt{2} \ln(1 + x). \\ (\text{OTBET: } \frac{1 - x}{\sqrt{1 + 2x - x^2}} \arcsin \frac{\sqrt{2}x}{1 + x}).$$

$$47. f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x). \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{\operatorname{ch}^3 x}).$$

$$48. f(x) = x + \operatorname{ctg} x \ln(1 + \sin x) - \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right). \\ (\text{Ответ: } -\frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin^2 x}).$$

$$49. f(x) = \sqrt{\sin x + \sqrt{x + \operatorname{ch} x}}. \\ (\text{Ответ: } \frac{1}{2\sqrt{\sin x + \sqrt{x + \operatorname{ch} x}}}(\cos x + \frac{1 + \operatorname{sh} x}{2\sqrt{x + \operatorname{ch} x}})).$$

$$50. f(x) = \frac{2}{3} \ln(\sqrt{x^3} + \sqrt{1 + x^3}). \quad (\text{Ответ: } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + x^3}}).$$

$$51. f(x) = \ln \frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\sin x}. \\ (\text{Ответ: } \frac{2}{\cos x \sqrt{\sin x}}).$$

$$52. f(x) = (2 + 3x)\sqrt{x - 1} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{x - 1}. \\ (\text{Ответ: } \frac{18x^2 - 8x + 3}{4x\sqrt{x - 1}}).$$

$$53. f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{2}} + \frac{2x + 1}{4x^2 + 4x + 3}. \\ (\text{Ответ: } \frac{8}{(4x^2 + 4x + 3)^2}).$$

$$54. f(x) = 3x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{6x}}) - e^{-3x} \arcsin e^{3x}. \\ (\text{Ответ: } 3e^{-3x} \arcsin e^{3x}).$$

$$55. f(x) = \sqrt{(3 - x)(2 + x)} - 5 \arccos \sqrt{\frac{x + 2}{5}}. \\ (\text{Ответ: } \sqrt{\frac{3 - x}{2 + x}}).$$

$$56. f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x. \quad (\text{Ответ: } \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x \left(\ln \frac{\sin x}{x} + x \operatorname{ctg} x - 1\right)).$$

$$57. f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}. \quad (\text{Ответ: } (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x} \left(\operatorname{ch} x \cdot \ln(\operatorname{ch} x) + \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x}\right)).$$

$$58. f(x) = x^{x^2}. \quad (\text{Ответ: } x^{1+x^2}(1 + 2 \ln x)).$$

$$59. f(x) = (\ln x)^{x^3}. \quad (\text{Ответ: } (\ln x)^{x^3} \left(3x^2 \ln \ln x + \frac{x^2}{\ln x}\right)).$$

$$60. f(x) = x^{\sin^2 x}. \quad (\text{Ответ: } x^{\sin^2 x} \left(\sin 2x \ln x + \frac{\sin^2 x}{x}\right)).$$

$$61. f(x) = (x^2 + 4x)^{x^4 + 2x}. \quad (\text{Ответ: } (x^2 + 4x)^{x^4 + 2x} \times \\ \times \left((4x^3 + 2) \ln(x^2 + 4x) + \frac{(x^4 + 2x)(2x + 4)}{x^2 + 4x}\right)).$$

$$62. f(x) = (\ln 4x)^{8x}. \quad (\text{Ответ: } 8(\ln 4x)^{8x} \left(\ln \ln 4x + \frac{1}{\ln 4x}\right)).$$

$$63. f(x) = (x^3 + 4)^{\operatorname{tg} x}. \quad (\text{Ответ: } (x^3 + 4)^{\operatorname{tg} x} \left(\frac{\ln(x^3 + 4)}{\cos^2 x} + \frac{3x^2 \operatorname{tg} x}{x^3 + 4}\right)).$$

$$64. f(x) = x^{e^{\cos x}}. \quad (\text{Ответ: } x^{e^{\cos x}} e^{\cos x} \left(\frac{1}{x} - \sin x \cdot \ln x\right)).$$

7.5. Вычислить левую и правую производные функции f в точке x_0 .

$$1. f(x) = |x^2 - 5x + 6|, \quad x_0 = 2. \quad (\text{Ответ: } f'_-(2) = -1, \quad f'_+(2) = 1).$$

$$2. f(x) = |2^x - 2|, \quad x_0 = 1.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f'_-(1) = -\ln 4, \quad f'_+(1) = \ln 4).$$

$$3. f(x) = \sqrt{\sin x^2}, \quad x_0 = 0. \quad (\text{ОТВЕТ: } f'_-(0) = -1, \quad f'_+(0) = 1).$$

$$4. f(x) = \sqrt[6]{\sin^6 \pi x}, \quad x_0 = 2.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f'_-(2) = -\pi, \quad f'_+(2) = \pi).$$

$$5. f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq 0, \\ \sqrt[3]{x^4} \ln x, & \text{если } x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f'_-(0) = 1, \quad f'_+(0) = 0).$$

$$6. f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x < 0, \\ \ln(1 + \sqrt[5]{x^7}), & \text{если } x \geq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f'_-(0) = 2, \quad f'_+(0) = 0).$$

$$7. f(x) = x(1 - x^2) \operatorname{sgn} x, \quad x_0 = 0.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f'_-(0) = -1, \quad f'_+(0) = 1).$$

$$8. f(x) = \left| x - \frac{\pi}{2} \right| \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f'_-(\pi/2) = 0, \quad f'_+(\pi/2) = 0).$$

$$9. f(x) = |x - 1|e^{-x}, \quad x_0 = 1.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f'_-(1) = -e^{-1}, \quad f'_+(1) = e^{-1}).$$

$$10. f(x) = x^2|x - 4|, \quad x_0 = 4.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f'_-(4) = -16, \quad f'_+(4) = 16).$$

$$11. f(x) = |x - 1| \operatorname{arctg} x, \quad x_0 = 1.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f'_-(1) = -\frac{\pi}{4}, \quad f'_+(1) = \frac{\pi}{4}).$$

$$12. f(x) = |x^2 - x|e^{2x}, \quad x_0 = 0.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f'_-(0) = -1, \quad f'_+(0) = 1).$$

$$13. f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{если } x < 0, \\ \sin x, & \text{если } x \geq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$(\text{Ответ: } f'_-(0) = 2, \quad f'_+(0) = 1).$$

$$14. f(x) = |x - \pi|(\operatorname{tg} x + 1), \quad x_0 = \pi.$$

$$(\text{Ответ: } f'_-(\pi) = -1, \quad f'_+(\pi) = 1).$$

$$15. f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{если } x < 1, \\ \ln(1 + \sqrt[3]{(x-1)^6}), & \text{если } x \geq 1, \end{cases} \quad x_0 = 1.$$

$$(\text{Ответ: } f'_-(1) = 2, \quad f'_+(1) = 6).$$

$$16. f(x) = |2x^2 - 5x - 3|, \quad x_0 = -\frac{1}{2}.$$

$$(\text{Ответ: } f'_-\left(-\frac{1}{2}\right) = -7, \quad f'_+\left(-\frac{1}{2}\right) = 7).$$

7.6. Найти постоянные α и β , при которых функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$.

$$1. f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & \text{если } x \leq -1, \\ x^2 + x + 1, & \text{если } x > -1. \end{cases}$$

$$(\text{Ответ: } \alpha = -1, \quad \beta = 0).$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \alpha + \beta x^2, & \text{если } |x| < 1, \\ \frac{1}{x^2}, & \text{если } |x| \geq 1. \end{cases}$$

$$(\text{Ответ: } \alpha = 2, \quad \beta = -1).$$

$$3. f(x) = \begin{cases} (x + \alpha)e^{-\beta x}, & \text{если } x < 0, \\ \alpha x^2 + \beta x + 1, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

$$(\text{Ответ: } \alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{2}).$$

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & \text{если } x < 0, \\ \alpha \cos x + \beta \sin x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

(Ответ: $\alpha = \beta$).

$$5. \quad f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{если } x \leq 0, \\ \alpha x + \beta, & \text{если } x > 0. \end{cases} \quad (\text{Ответ: } \alpha = 2, \beta = 1).$$

$$6. \quad f(x) = \begin{cases} \alpha + \beta x^2, & \text{если } |x| < 1, \\ \sin \frac{\pi}{2}|x|, & \text{если } |x| \geq 1. \end{cases}$$

(Ответ: $\alpha = 1, \beta = 0$).

$$7. \quad f(x) = \begin{cases} \alpha x + 3, & \text{если } x \leq 1, \\ \beta x^2 + x + 3, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

(Ответ: $\alpha = 1, \beta = 0$).

$$8. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & \text{если } x \leq 0, \\ 2x + \sin x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

(Ответ: $\alpha = 3, \beta = 0$).

7.7. Найти производную функции f на множестве, где производная существует.

$$1. \quad f(x) = |x(x+1)|.$$

$$\text{Ответ: } f'(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{если } x < -1, \quad x > 0, \\ -2x-1, & \text{если } -1 < x < 0. \end{cases}$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } f'(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } f'(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}, \quad x \neq 0.$$

$$5. f(x) = |2x - \pi| \cos x.$$

$$\text{Ответ: } f'(x) = \begin{cases} 2 \cos x - (2x - \pi) \sin x, & \text{если } x > \pi/2, \\ -2 \cos x + (2x - \pi) \sin x, & \text{если } x < \pi/2, \\ 0, & \text{если } x = \pi/2. \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos x}{x}, & \text{если } -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } f'(x) = \begin{cases} \frac{-x \operatorname{tg} x - \ln \cos x}{x^2}, & \text{если } -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \quad x \neq 0, \\ -\frac{1}{2}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \cos \frac{1}{x} \right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } f'(x) = \begin{cases} 4x + \sin \frac{1}{x} + 2x \cos \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+4x^2)}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } f'(x) = \begin{cases} \frac{8x^2 - (1+4x^2)\ln(1+4x^2)}{x^2(1+4x^2)}, & \text{если } x \neq 0, \\ 4, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

7.8. Найти производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически (для допустимых значений параметра).

$$1. x = e^{-t}, y = t^3. \quad (\text{Ответ: } y'_x = -3t^2 e^t).$$

$$2. x = t^2 + 6t + 5, y = \frac{t^3 - 54}{t}. \quad (\text{Ответ: } y'_x = \left(1 - \frac{3}{t} + \frac{9}{t^2}\right)).$$

$$3. x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t). \quad (\text{Ответ: } y'_x = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}).$$

$$4. x = \ln(1+t^2), y = t - \operatorname{arctg} t. \quad (\text{Ответ: } y'_x = \frac{t}{2}).$$

$$5. x = t(1 - \sin t), y = t \cos t.$$

$$(\text{Ответ: } y'_x = \frac{\cos t - t \sin t}{1 - \sin t - t \cos t}).$$

$$6. x = e^t \sin t, y = e^t \cos t. \quad (\text{Ответ: } y'_x = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}).$$

$$7. x = \sin t, y = \cos 2t. \quad (\text{Ответ: } y'_x = -4 \sin t).$$

$$8. x = \frac{at^2}{1+t^2}, y = \frac{at\sqrt{3}}{1+t^2}. \quad (\text{Ответ: } y'_x = \frac{\sqrt{3}(1-t^2)}{2t}).$$

$$9. x = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, y = 3 \ln \operatorname{ctg} t. \quad (\text{Ответ: } y'_x = \frac{3}{2} \operatorname{tg} 2t).$$

$$10. x = \operatorname{arctg} e^{t/2}, y = \sqrt{e^t + 1}. \quad (\text{Ответ: } y'_x = e^{t/2} \sqrt{e^t + 1}).$$

$$11. x = \sqrt{2t - t^2}, y = \arcsin(t - 1). \quad (\text{Ответ: } y'_x = \frac{1}{1-t}).$$

$$12. \quad x = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}), \quad y = t\sqrt{t^2 + 1}. \quad (\text{ОТВЕТ: } y'_x = 2t^2 + 1).$$

$$13. \quad x = \frac{3t^2 + 1}{3t^3}, \quad y = \sin\left(\frac{t^3}{3} + t\right). \\ (\text{ОТВЕТ: } y'_x = -t^4 \cos\left(\frac{t^3}{3} + t\right)).$$

$$14. \quad x = \ln \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \quad y = \sqrt{1-t^2}. \quad (\text{ОТВЕТ: } y'_x = t\sqrt{1-t^2}).$$

$$15. \quad x = \operatorname{ctg}(2e^t), \quad y = \ln \operatorname{tg} e^t. \quad (\text{ОТВЕТ: } y'_x = -\sin(2e^t)).$$

$$16. \quad x = t\sqrt{t^2 + 1}, \quad y = \ln \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t}. \\ (\text{ОТВЕТ: } y'_x = -\frac{1}{t(2t^2 + 1)}).$$

7.9. Найти производную функции $y=y(x)$, заданной неявно.

$$1. \quad (2a - x)y^2 = x^3. \quad (\text{ОТВЕТ: } y' = \frac{(3a - x)y}{(2a - x)x}).$$

$$2. \quad e^y + xy = e. \quad (\text{ОТВЕТ: } y' = -\frac{y}{x + e^y}).$$

$$3. \quad x^3 + y^3 - 3axy = 0. \quad (\text{ОТВЕТ: } y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}).$$

$$4. \quad y = x + \operatorname{arctg} y. \quad (\text{ОТВЕТ: } y' = \frac{1 + y^2}{y^2}).$$

$$5. \quad x + \sqrt{xy} + y = a. \quad (\text{ОТВЕТ: } y' = -\frac{y + 2\sqrt{xy}}{x + 2\sqrt{xy}}).$$

$$6. \quad e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0. \quad (\text{ОТВЕТ: } y' = -\frac{e^x \sin y + e^{-y} \sin x}{e^x \cos y + e^{-y} \cos x}).$$

$$7. \quad 2^x + 2^y = 2^{x+y}. \quad (\text{ОТВЕТ: } y' = \frac{2^x(2^y - 1)}{2^y(1 - 2^x)}).$$

8. $y \sin x - \cos(x - y) = 0$. (Ответ: $y' = \frac{y \cos x + \sin(x - y)}{\sin(x - y) - \sin x}$).
9. $y = 1 + xe^y$. (Ответ: $y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$).
10. $x + y = e^{x-y}$. (Ответ: $y' = \frac{e^{x-y} - 1}{e^{x-y} + 1} = \frac{x + y - 1}{x + y + 1}$).
11. $y + e^y + x^2 + 2x + 1 = e^2$. (Ответ: $y' = -\frac{2x + 2}{e^y + 1}$).
12. $xe^y + xy + x^2 + y^2 = 8$. (Ответ: $y' = -\frac{e^y + y + 2x}{xe^y + x + 2y}$).
13. $x^2 \sin y + y = \pi$. (Ответ: $y' = -\frac{2x \sin y}{x^2 \cos y + 1}$).
14. $xe^{-y} + ye^{-x} = 1$. (Ответ: $y' = \frac{ye^{-x} - e^{-y}}{e^{-x} - xe^{-y}}$).
15. $x^2 + y^2 = \sin(x + y)$. (Ответ: $y' = \frac{\cos(x + y) - 2x}{2y - \cos(x + y)}$).
16. $x^4 + y^4 - 4x^2 + 2y^2 - 99 = 0$. (Ответ: $y' = \frac{2x - x^3}{y + y^3}$).

7.10. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить.

1. $\sqrt[3]{65}$. (Ответ: 4,02).
2. $\sqrt[4]{15,8}$. (Ответ: 1,99).
3. $\sin 29^\circ$. (Ответ: 0,48).
4. $\operatorname{arctg} 0,9$. (Ответ: 0,74).
5. $\cos 151^\circ$. (Ответ: -0,87).
6. $e^{0,2}$. (Ответ: 1,2).

7. $\arcsin 0,5011$. (ОТВЕТ: $0,52$).
8. $\ln 1,2$. (ОТВЕТ: $0,2$).
9. $\sqrt[3]{7,76}$. (ОТВЕТ: $1,98$).
10. $\sqrt[3]{0,03 + \cos 0,01}$. (ОТВЕТ: $1,01$).
11. $\sqrt[5]{33}$. (ОТВЕТ: $2,01$).
12. $\arcsin 0,08$. (ОТВЕТ: $0,08$).

7.11. Найти дифференциал функции f в точке x_0 .

1. $f(x) = \frac{1}{x} + \ln \frac{x-1}{x}$, $x_0 = -1$. (ОТВЕТ: $df(-1) = -\frac{1}{2} dx$).

2. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = e^{-1}$.

$$(\text{ОТВЕТ: } df(e^{-1}) = -\frac{2e^2}{e^2 + 1} dx).$$

3. $f(x) = \ln(1 + e^{10x}) + \operatorname{arctg} e^{5x}$, $x_0 = 0$.

$$(\text{ОТВЕТ: } df(0) = \frac{15}{2} dx).$$

4. $f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sh} 4x}$, $x_0 = 0$. (ОТВЕТ: $df(0) = 2 dx$).

5. $f(x) = \frac{x^2 2^x}{x^x}$, $x_0 = 1$. (ОТВЕТ: $df(1) = 2(1 + \ln 2) dx$).

6. $f(x) = \operatorname{sh}^2 x^3 + \operatorname{ch} x^2$, $x_0 = 0$. (ОТВЕТ: $df(0) = 0$).

7. $f(x) = x \ln(x-2)$, $x_0 = 3$. (ОТВЕТ: $df(3) = 3 dx$).

8. $f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

$$(\text{ОТВЕТ: } df\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2(4 + 3\sqrt{2}) dx).$$

$$9. \quad f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x_0 = 1.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } df(1) = -\frac{1}{4} dx).$$

$$10. \quad f(x) = \frac{x^3 3^x}{1+x^2}, \quad x_0 = 1. \quad (\text{ОТВЕТ: } df(1) = \frac{3}{2}(2 + \ln 3) dx).$$

$$11. \quad f(x) = (2x+1)2^{4-x^2}, \quad x_0 = 1.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } df(1) = 16(1 - 3 \ln 2) dx).$$

$$12. \quad f(x) = e^{-x}(\cos 2x - 2 \sin 2x), \quad x_0 = -\frac{\pi}{2}.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } df\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 5e^{\pi/2} dx).$$

7.12. Найти дифференциал функции f .

$$1. \quad f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{x + \sqrt{x}}.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } df = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}} dx).$$

$$2. \quad f(x) = \arccos e^x.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } df = -\frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}).$$

$$3. \quad f(x) = \ln \frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\sin x}.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } df = \frac{2 dx}{\cos x \sqrt{\sin x}}).$$

$$4. \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1}.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } df = -\frac{x(x^3 + 3x + 2)}{(x^3 - 1)^2} dx).$$

$$5. \quad f(x) = 2\sqrt{x^3}(3 \ln x - 2).$$

$$(\text{ОТВЕТ: } df = 9\sqrt{x} \ln x dx).$$

$$6. \quad f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } df = \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}} dx).$$

$$7. f(x) = \ln(\sqrt{1+2\sin x} + \sqrt{2\sin x-1}).$$

$$(\text{Ответ: } df = \frac{\cos x}{\sqrt{4\sin^2 x - 1}} dx).$$

$$8. f(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+3}) - \sqrt{x^2+3}.$$

$$(\text{Ответ: } df = \ln(x + \sqrt{x^2+3}) dx).$$

$$9. f(x) = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}, \quad x > 0. \quad (\text{Ответ: } df = \frac{\sqrt{2} dx}{1+2x^2}).$$

$$10. f(x) = \sqrt{1+2x} - \ln(x + \sqrt{1+2x}).$$

$$(\text{Ответ: } df = \frac{(x-1) dx}{\sqrt{1+2x}(x + \sqrt{1+2x})}).$$

$$11. f(x) = \operatorname{arctgsh} x + \operatorname{sh} x \ln \operatorname{ch} x.$$

$$(\text{Ответ: } df = \operatorname{ch} x (1 + \ln \operatorname{ch} x) dx).$$

$$12. f(x) = (x^3 + 2)\sqrt{1-x^3}. \quad (\text{Ответ: } df = -\frac{9x^5 dx}{2\sqrt{1-x^3}}).$$

7.13. В указанной точке вычислить дифференциал функции $y = y(x)$, заданной неявно.

$$1. \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1; 0). \quad (\text{Ответ: } dy = dx).$$

$$2. x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0, \quad (1; 3). \quad (\text{Ответ: } dy = \frac{1}{4} dx).$$

$$3. xy - \sqrt[3]{xy^2 + 6} = 0, \quad (2; 1). \quad (\text{Ответ: } dy = -\frac{11}{20} dx).$$

$$4. xe^{(x/y^2)-1} - 2y, \quad (4; 2). \quad (\text{Ответ: } dy = \frac{1}{3} dx).$$

$$5. \sqrt{2x} - \sqrt[3]{y} = 1, \quad (2; 1). \quad (\text{Ответ: } dy = \frac{3}{2} dx).$$

$$6. e^x \cos y = e^{-y} \sin x, \quad \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \quad (\text{Ответ: } dy = -e^{-\pi/2} dx).$$

$$7. \frac{y}{x} + e^{y/x} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = e, \quad (1; 1). \quad (\text{Ответ: } dy = dx).$$

$$8. \sqrt{x^2 + y^2} + \sin(\pi x + y) = 1, \quad (1; 0). \quad (\text{Ответ: } dy = (1 - \pi) dx).$$

$$9. 2e^{xy} + xy = 2e + 1, \quad (1; 1). \quad (\text{Ответ: } dy = -dx).$$

$$10. 2xy^3 + \ln \sqrt{\frac{x}{x+y}} = 0, \quad (1; 0). \quad (\text{Ответ: } dy = 0).$$

$$11. x^2 + 4xy + x^3y^3 + 4 = 0, \quad (-1; 1). \quad (\text{Ответ: } dy = \frac{5}{7} dx).$$

$$12. y^2 = x + e^{xy}, \quad (0; 1). \quad (\text{Ответ: } dy = dx).$$

7.14. Для заданной параметрически функции $y = y(x)$ вычислить дифференциал в указанной точке.

$$1. x = \operatorname{tg} t, \quad y = \sin 2t + 2 \cos 2t \quad \text{в точке } (0; 2). \quad (\text{Ответ: } dy = 2 dx).$$

$$2. x = t^2 + 6t + 5, \quad y = \frac{t^3 - 54}{t} \quad \text{при } t = 1. \quad (\text{Ответ: } dy = 7 dx).$$

$$3. x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad \text{в точке } \left(a \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right); a \right). \quad (\text{Ответ: } dy = dx).$$

$$4. x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t \quad \text{при } t = \frac{\pi}{6}. \quad (\text{Ответ: } dy = (2 + \sqrt{3}) dx).$$

$$5. x = (t - 1)^2(t - 2), \quad y = (t - 1)^2(t - 3) \quad \text{в точке } (4; 0). \quad (\text{Ответ: } dy = \frac{1}{2} dx).$$

$$6. \quad x = \ln(1+t^2), \quad y = t - \operatorname{arctg} t \quad \text{при } t = 2.$$

$$(\text{Ответ: } dy = dx).$$

$$7. \quad x = t^2 + 2t, \quad y = \ln(t+1) \quad \text{в точке } (0; 0).$$

$$(\text{Ответ: } dy = \frac{1}{2} dx).$$

$$8. \quad x = \frac{t+1}{t}, \quad y = \frac{t-1}{t} \quad \text{при } t = 3.$$

$$(\text{Ответ: } dy = -dx).$$

$$9. \quad x = \frac{t^2+1}{t^2-1}, \quad y = \frac{t}{t^2-1} \quad \text{при } t = \sqrt{2}.$$

$$(\text{Ответ: } dy = \frac{3\sqrt{2}}{8} dx).$$

$$10. \quad x = 4t \ln t, \quad y = \frac{\ln t}{2t} \quad \text{в точке } (0; 0). \quad (\text{Ответ: } dy = \frac{1}{8} dx).$$

$$11. \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \frac{t^2}{2} \quad \text{при } t = 4. \quad (\text{Ответ: } dy = 68 dx).$$

$$12. \quad x = \sqrt{t-3}, \quad y = \ln(t-4) \quad \text{в точке } (2; \ln 3).$$

$$(\text{Ответ: } dy = \frac{4}{3} dx).$$

7.15. Написать уравнения касательной и нормали к заданной кривой в указанной точке.

$$1. \quad y = \sqrt{5-x^2} \quad \text{при } x = 1.$$

$$(\text{Ответ: } x + 2y - 5 = 0 \quad \text{касательная;} \\ 2x - y = 0 \quad \text{нормаль}).$$

$$2. \quad y = 4 \operatorname{ctg} x - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \quad \text{при } x = \frac{\pi}{2}.$$

$$(\text{Ответ: } 6x + 2y - 3\pi = 0 \quad \text{касательная;} \\ 2x - 6y - \pi = 0 \quad \text{нормаль}).$$

$$3. \quad x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t) \quad \text{при } t = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} (\text{Ответ: } x - y + 4 - \pi = 0 & \quad \text{касательная;} \\ x + y - \pi = 0 & \quad \text{нормаль}). \end{aligned}$$

$$4. \quad x = \frac{2t-1}{t^2}, \quad y = \frac{3t^2-1}{t^3} \quad \text{в точке } (1; 2).$$

$$\begin{aligned} (\text{Ответ: } 3x - y - 1 = 0 & \quad \text{касательная;} \\ x + 3y - 7 = 0 & \quad \text{нормаль}). \end{aligned}$$

$$5. \quad x^5 + y^5 - 2xy = 0 \quad \text{в точке } (1; 1).$$

$$\begin{aligned} (\text{Ответ: } x + y - 2 = 0 & \quad \text{касательная;} \\ x - y = 0 & \quad \text{нормаль}). \end{aligned}$$

$$6. \quad x = \sqrt{2} \cos^3 t, \quad y = \sqrt{2} \sin^3 t \quad \text{в точке } \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} (\text{Ответ: } x + y - 1 = 0 & \quad \text{касательная;} \\ x - y = 0 & \quad \text{нормаль}). \end{aligned}$$

$$7. \quad x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0 \quad \text{в точке } (-1; 3).$$

$$\begin{aligned} (\text{Ответ: } 5x + 6y - 13 = 0 & \quad \text{касательная;} \\ 6x - 5y + 21 = 0 & \quad \text{нормаль}). \end{aligned}$$

$$8. \quad y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3 \quad \text{при } x = 1.$$

$$\begin{aligned} (\text{Ответ: } 27x - 9y - 22 = 0 & \quad \text{касательная;} \\ 3x + 9y - 8 = 0 & \quad \text{нормаль}). \end{aligned}$$

$$9. \quad 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0 \quad \text{в точке } (-2; 1).$$

$$\begin{aligned} (\text{Ответ: } 7x + 4y + 10 = 0 & \quad \text{касательная;} \\ 4x - 7y + 15 = 0 & \quad \text{нормаль}). \end{aligned}$$

$$10. \quad x = t^3 - 2t, \quad y = t^2 + 1 \quad \text{в точке } (-1; 2).$$

$$\begin{aligned} (\text{Ответ: } 2x - y + 4 = 0 & \quad \text{касательная;} \\ x + 2y - 3 = 0 & \quad \text{нормаль}). \end{aligned}$$

11. $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0$ в точке $(1; 2)$.

(Ответ: $14x - 13y + 12 = 0$ касательная;
 $13x + 14y - 41 = 0$ нормаль).

12. $y = |x^2 - |x||$ в точке с абсциссой -2 .

(Ответ: $3x + y + 4 = 0$ касательная;
 $x - 3y + 8 = 0$ нормаль).

13. $y = \frac{x^3 + 2}{x^3 - 2}$ в точке с абсциссой 2 .

(Ответ: $4x + 3y - 13 = 0$ касательная;
 $9x - 12y + 2 = 0$ нормаль).

14. $x = \frac{1 + \ln t}{t^2}$, $y = \frac{3 + 2 \ln t}{t^2}$ в точке $(1; 3)$.

(Ответ: $4x - y - 1 = 0$ касательная;
 $x + 4y - 13 = 0$ нормаль).

15. $3x^4 - 2xy^3 + 2y^4 = 7$ в точке $(1; -1)$.

(Ответ: $x - y - 2 = 0$ касательная;
 $x + y = 0$ нормаль).

16. $y = \frac{(1 + \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x})}$ в точке $(4; -3)$.

(Ответ: $x - 2y - 10 = 0$ касательная;
 $2x + y - 5 = 0$ нормаль).

7.16. Определить, в каких точках и под какими углами пересекаются кривые.

1. $y = x^2$, $x = y^2$.

(Ответ: в точке $(0; 0)$ $\alpha = \frac{\pi}{2}$; в точке $(1; 1)$ $\alpha = \arctg \frac{3}{4}$).

$$2. \quad 8y^2 = x^3, \quad 4x - 3y - 11 = 0.$$

$$(\text{Ответ: в точке } (2; -1) \quad \alpha = \frac{\pi}{2}).$$

$$3. \quad x^3 + y^3 - xy - 7 = 0, \quad y = x + 1.$$

$$(\text{Ответ: в точке } (1; 2) \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{6}{5}).$$

$$4. \quad y = x^2 - 4x + 4, \quad y = -x^2 + 6x - 4.$$

$$(\text{Ответ: в точках } (1; 1) \text{ и } (4; 4) \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{6}{7}).$$

$$5. \quad y = x^2, \quad 3x - y - 2 = 0.$$

$$(\text{Ответ: в точке } (1; 1) \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{7};$$

$$\text{в точке } (2; 4) \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{13}).$$

$$6. \quad 2y = 8 - x^2, \quad y = 4 - x.$$

$$(\text{Ответ: в точке } (0; 4) \quad \alpha = \frac{\pi}{4}; \text{ в точке } (2; 2) \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}).$$

$$7. \quad x^2 + y^2 = 16, \quad y^2 = -6x.$$

$$(\text{Ответ: в точках } (-2; 2\sqrt{3}) \text{ и } (-2; -2\sqrt{3}) \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{3}}{3}).$$

$$8. \quad y^2 - 4x^3 = 0, \quad y - x = 1.$$

$$(\text{Ответ: в точке } (1; 2) \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}).$$

$$9. \quad 2y = x^2, \quad 2y = 8 - x^2.$$

$$(\text{Ответ: в точках } (-2; 2) \text{ и } (2; 2) \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}).$$

$$10. \quad x^2 + y^2 = 8, \quad y^2 = 2x.$$

$$(\text{Ответ: в точках } (2; -2) \text{ и } (2; 2) \quad \alpha = \operatorname{arctg} 3).$$

$$11. \quad y(x^2 + 1) = 2, \quad \begin{cases} x = t + 1, \\ y = t^3 + 1. \end{cases}$$

(Ответ: в точке $(1; 1)$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$).

$$12. \quad x + y = 2, \quad \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$$

(Ответ: в точке $(1; 1)$ $\alpha = \operatorname{arctg} 5$).

7.17. Разные задачи.

1. В какой точке кривой $y^2 = 2x^3$ касательная к ней перпендикулярна прямой $4x - 3y + 2 = 0$?

(Ответ: в точке $(\frac{1}{8}; -\frac{1}{16})$).

2. В уравнении параболы $y = x^2 + bx + c$ найти числа b и c так, чтобы она касалась прямой $y = 2x - 1$ в точке с абсциссой $x = 2$.

(Ответ: $b = -2$, $c = 3$).

3. Найти угол между левой и правой полукасательными к кривой $y = \sqrt{2x^3 + 9x^2}$ в точке $(0; 0)$.

(Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$).

4. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $(2; -1)$ и касающихся кривой $y = x^2 - 4$.

(Ответ: $y = 2x - 5$, $y = 6x - 13$).

5. На параболе $y = x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна секущей?

(Ответ: в точке $(2; 4)$).

6. Найти угол между левой и правой полукасательными к кривой $y = \sqrt{1 - e^{-3x^2}}$ в точке $(0; 0)$.
(Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{3}$).
7. Составить уравнение той нормали к параболе $y = x^2 - 6x + 6$, которая перпендикулярна прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы.
(Ответ: $4x - 4y - 21 = 0$).
8. Определить числа a , b и c в уравнении параболы $y = ax^2 + bx + c$ так, чтобы она касалась прямой $y = x$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ и проходила через точку $(-1; 0)$.
(Ответ: $a = c = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$).
9. Написать уравнения касательных к параболе $x = y^2 - 4y + 3$, проходящих через точку $(-5; 2)$.
(Ответ: $x - 4y + 13 = 0$, $x + 4y - 3 = 0$).
10. Показать, что отрезок касательной к астроидам $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$, заключенный между осями координат, имеет постоянную длину. Каково значение этой длины?
(Ответ: 4).
11. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(2; -1)$ и касающейся кривой $y = x^2 - 4$.
(Ответ: $y - 2x + 5 = 0$, $y - 6x + 13 = 0$).
12. Найти точки, в которых нормаль к параболе $y = 4x - x^2 - 3,5$ проходит через начало координат.
(Ответ: $(1; -0,5)$).
13. Через точку $(-7; 5)$ провести касательную к параболе $x^2 = 8y$.
(Ответ: $x + y + 2 = 0$, $5x + 2y + 25 = 0$).

14. В какой точке параболы $y = x^2 - 2x + 5$ нужно провести касательную, чтобы она была перпендикулярна биссектрисе первого координатного угла?

(Ответ: в точке $\left(\frac{1}{2}; \frac{17}{4}\right)$).

15. Доказать, что касательные к гиперболе $xy = 25$ в произвольной точке образуют с осями координат треугольники постоянной площади. Найти эту площадь.

(Ответ: 50).

16. Найти площадь треугольника, образованного осью Ox и касательными к окружности $x^2 + y^2 = 4$, проходящими через точку $(0; 4)$.

(Ответ: $\frac{16\sqrt{3}}{3}$).

7.18. Найти производные второго порядка заданных функций.

1. $f(x) = \frac{x(1 + 3\sqrt{1 - x^2})}{\sqrt{1 - x^2}}$. (Ответ: $f''(x) = 3x(1 - x^2)^{-5/2}$).

2. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. (Ответ: $f''(x) = -x(1 + x^2)^{-3/2}$).

3. $f(x) = \arcsin \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $x > 0$. (Ответ: $f''(x) = -4x(x^2 + 1)^{-2}$).

4. $f(x) = \log_2 \sqrt[3]{1 - x^2}$.

(Ответ: $f''(x) = -\frac{2}{3 \ln 2} (1 + x^2)(1 - x^2)^{-2}$).

5. $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$. (Ответ: $f''(x) = 8x^3(3x^4 - 5)(1 + x^4)^{-3}$).

6. $f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{3 - x^2} + \frac{3}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}}$.

(Ответ: $f''(x) = -x(3 - x^2)^{-1/2}$).

$$7. f(x) = (1 - x - x^2)e^{(x-1)/2}.$$

$$(\text{Ответ: } f''(x) = -\frac{1}{4}(x^2 + 9x + 11)e^{(x-1)/2}).$$

$$8. f(x) = e^{1-2x} \sin(2x + 3).$$

$$(\text{Ответ: } f''(x) = -8e^{1-2x} \cos(2x + 3)).$$

$$9. f(x) = \frac{3x - 5}{\ln(3x - 5)}. \quad (\text{Ответ: } f''(x) = \frac{9(2 - \ln(3x - 5))}{(3x - 5) \ln^3(3x - 5)}).$$

$$10. f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 6}.$$

$$(\text{Ответ: } f''(x) = \frac{15}{4}(x^2 + 3x + 6)^{-3/2}).$$

$$11. f(x) = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x.$$

$$(\text{Ответ: } f''(x) = 4 \operatorname{ch} 2x).$$

$$12. f(x) = x^2 + \operatorname{ctg} 2x.$$

$$(\text{Ответ: } f''(x) = 2 + \frac{8 \cos 2x}{\sin^3 2x}).$$

7.19. Найти производные указанных порядков функций, заданных параметрически.

$$1. \text{ Найти } y''_{x^2} \text{ в точке } (1; 0), \text{ если } x = (t^2 + 1)e^t, \quad y = t^2 e^{2t}.$$

$$(\text{Ответ: } y''_{x^2}|_{(1;0)} = 2).$$

$$2. \text{ Найти } y''_{x^2}, \text{ если } x = t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t, \quad y = t \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t.$$

$$(\text{Ответ: } y''_{x^2} = -\frac{1}{t \operatorname{sh}^3 t}).$$

$$3. \text{ Найти } x''_{y^2}, \text{ если } x = \log_5 \sin t, \quad y = \log_5 \cos t.$$

$$(\text{Ответ: } x''_{y^2} = -\frac{2 \ln 5 \cdot \operatorname{ctg}^2 t}{\sin^2 t}).$$

$$4. \text{ Найти } y'''_{x^3}, \text{ если } x = \cos t - \ln \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, \quad y = \sin t.$$

$$(\text{Ответ: } y'''_{x^3} = \frac{\sin t(1 + 3 \sin^2 t)}{\cos^7 t}).$$

5. Найти y''_{x^2} , если $x = \frac{e^t}{1+t}$, $y = (t-1)e^t$.

$$(\text{Ответ: } y''_{x^2} = \frac{2(1+t)^3}{te^t}).$$

6. Найти y''_{x^2} в точке $(0; 4)$, если $x = \frac{2t-t^2}{t-1}$, $y = \frac{t^2}{t-1}$.

$$(\text{Ответ: } y''_{x^2}|_{(0;4)} = \frac{1}{2}).$$

7. Найти x''_{y^2} , если $x = \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, $y = \ln \operatorname{tg} t$.

$$(\text{Ответ: } x''_{y^2} = -\sin^2 t \cos t).$$

8. Найти x''_{y^2} , если $x = -2 + 3t - t^3$, $y = t + 2t^2 + t^3$.

$$(\text{Ответ: } x''_{y^2} = -\frac{12}{(t+1)(3t+1)^3}).$$

9. Найти y'''_{x^3} , если $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$.

$$(\text{Ответ: } y'''_{x^3} = \frac{4e^{2t}(2\sin t - \cos t)}{(\sin t + \cos t)^5}).$$

10. Найти y''_{x^2} в точке $(\ln \frac{3}{2}; \ln \frac{1}{2})$, если $x = \ln(1 + \sin \varphi)$,
 $y = \ln(1 - \cos 2\varphi)$.

$$(\text{Ответ: } y''_{x^2}|_{(\ln \frac{3}{2}; \ln \frac{1}{2})} = -12).$$

11. Найти $y^{(5)}_{x^5}$, если $x = \operatorname{arctg} t$, $y = \ln(1 + t^2)$.

$$(\text{Ответ: } y^{(5)}_{x^5} = 16(3t^5 + 5t^3 + 2t)).$$

12. Найти y''_{x^2} , если $x = \operatorname{sh}^2 t$, $y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$.

$$(\text{Ответ: } y''_{x^2} = \frac{2}{\operatorname{ch}^6 t}).$$

7.20. Вычислить указанные производные или дифференциалы для функций, заданных неявно.

1. d^2y в точке $(0; 1)$, если $2 \ln(y - x) + \sin xy = 0$.

(Ответ: $d^2y = -\frac{1}{4} dx^2$).

2. y''' , если $x^2 - y^2 = a^2$.

(Ответ: $y'''(x) = \frac{3a^2x}{y^5}$).

3. d^2y в точке $(1; 1)$, если $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y = 2$.

(Ответ: $d^2y = -\frac{1}{3} dx^2$).

4. y'' , если $e^{2y} - 2 \ln x - y = 0$.

(Ответ: $y''(x) = -\frac{2(2e^{2y} + 1)^2}{x^2(2e^{2y} - 1)^3}$).

5. d^2y в точке $(1; 2)$, если $x^3 + 2xy + y^3 = 13$.

(Ответ: $d^2y = -\frac{1}{2} dx^2$).

6. y''' , если $x^2 + xy + y^2 = 3$.

(Ответ: $y'''(x) = -\frac{162x}{(x+2y)^5}$).

7. d^2y , если $x^2 + y^2 + 3xy = 20$.

(Ответ: $d^2y = \frac{200 dx^2}{(3x + 2y)^3}$).

8. y'' в точке $(1; 0)$, если $xe^y + xy = 1$.

(Ответ: $y'' = \frac{7}{8}$).

9. y'' , если $3xy + y^3 = 4x + 1$.

(Ответ: $y'' = \frac{2(3y - 4)(3x + 4y)}{9(x + y^2)^3}$).

10. y'' в точке $(0; 1)$, если $xy + e^{2xy} = 3x + 5y - 4$.

(Ответ: $y'' = 0,8$).

$$11. d^2y \text{ в точке } (1; 1), \text{ если } 2x^3y + xy^2 + e^{x-y} = 4.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } d^2y = dx^2).$$

$$12. y''', \text{ если } y = \operatorname{tg}(x + y).$$

$$(\text{ОТВЕТ: } y''' = -\frac{10}{y^8} - \frac{16}{y^6} - \frac{6}{y^4}).$$

7.21. Найти производную порядка n заданных функций.

$$1. f(x) = (x - 2)\operatorname{sh}^2 2x, \quad n = 10.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f^{(10)}(x) = 4^9((2x - 4) \operatorname{ch} 4x + 5\operatorname{sh} 4x)).$$

$$2. f(x) = x^2 \sin^2 x, \quad n = 8.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f^{(8)}(x) = 2^7(-x^2 \cos 2x - 8x \sin 2x + 14 \cos 2x)).$$

$$3. f(x) = (x^2 - x)e^{-x}, \quad n = 15.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f^{(15)}(x) = (-x^2 + 31x - 225)e^{-x}).$$

$$4. f(x) = (2x + 3) \sin 2x, \quad n = 8.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f^{(8)}(x) = 2^8((2x + 3) \sin 2x - 8 \cos 2x)).$$

$$5. f(x) = \frac{x^2}{x - 1}, \quad n = 6.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f^{(6)}(x) = 6!(x - 1)^{-7}).$$

$$6. f(x) = x \log_2 x, \quad n = 10.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f^{(10)}(x) = \frac{8!}{x^9 \ln 2}).$$

$$7. f(x) = e^{-x} \sin x, \quad n = 5.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f^{(5)}(x) = 4(\sin x - \cos x)e^{-x}).$$

$$8. f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x - 2}, \quad n = 8.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f^{(8)}(x) = \frac{11 \cdot 8!}{(x - 2)^9}).$$

$$9. f(x) = \frac{11 + 12x}{6x + 5}, \quad n = 10.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f^{(10)}(x) = \frac{6^{10} \cdot 10!}{(6x + 5)^{11}).$$

$$10. f(x) = (x + 1) \sin 2x + (1 - x) \cos 2x, \quad n = 19.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f^{(19)}(x) = -2^{18}((2x + 17) \sin 2x + (2x - 17) \cos 2x)).$$

$$11. f(x) = (x^2 - 3x - 10)e^{-2x}, \quad n = 16.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f^{(16)}(x) = 2^{16}(x^2 - 19x + 74)e^{-2x}.)$$

$$12. f(x) = \ln \frac{3x+5}{3x-2}, \quad n = 10.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f^{(10)}(x) = -3^{10} \cdot 9! \left(\frac{1}{(3x+5)^{10}} - \frac{1}{(3x-2)^{10}} \right).$$

7.22. Найти производную n -го порядка функций.

$$1. f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f^{(n)}(x) = \frac{(2n-3)!!(4n-1-x)}{2^n(1-x)^n\sqrt{1-x}}, \quad n > 1;$$

$$f'(x) = \frac{3-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}.$$

$$2. f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right).$$

$$3. f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right).$$

$$4. f(x) = \sin 2x \sin 3x.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left(\cos \left(x + \frac{\pi n}{2} \right) - 5^n \cos \left(5x + \frac{\pi n}{2} \right) \right).$$

$$5. f(x) = \sqrt{2x+7}.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (2n-3)!! (2x+7)^{(1-2n)/2}, \quad n > 1;$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+7}}.$$

$$6. f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x. \quad (\text{ОТВЕТ: } f^{(n)}(x) = 4^{n-1} \cos \left(4x + \frac{n\pi}{2} \right)).$$

$$7. f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x - 12}.$$

$$(\text{Ответ: } f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{4} n! \left(\frac{3}{(x-6)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right)).$$

$$8. f(x) = \ln \frac{2x+3}{3x+2}.$$

$$(\text{Ответ: } f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\frac{2^n}{(2x+3)^n} - \frac{3^n}{(3x+2)^n} \right)).$$

$$9. f(x) = (2x^2 - x + 1)e^{2x}.$$

$$(\text{Ответ: } f^{(n)}(x) = 2^{n-1} e^{2x} (4x^2 + (4n-2)x + n^2 - 2n + 2)).$$

$$10. f(x) = (x^2 + 10) \cos 2x. \text{ Найти } f^{(2n)}(x).$$

$$(\text{Ответ: } f^{(2n)}(x) = (-1)^n 2^{2n-1} (2(x^2+10) \cos 2x + 4nx \sin 2x - n(2n-1) \cos 2x)).$$

$$11. f(x) = (2x+1) \ln(1-2x).$$

$$(\text{Ответ: } f^{(n)}(x) = 2^n (n-2)! (1-2x)^{-n} (2x-2n+1), \quad n > 1;$$

$$f'(x) = 2 \left(\ln(1-2x) + \frac{2x+1}{2x-1} \right)).$$

$$12. f(x) = (x^2 + 3x + 3)e^{2x+2}.$$

$$(\text{Ответ: } f^{(n)}(x) = 2^{n-2} e^{2x+2} (4x^2 + 12x + 4nx + n^2 + 5n + 12)).$$

7.23. Найти дифференциалы указанных порядков заданных функций (x — независимая переменная).

$$1. f(x) = (5x^2 - 1) \sin 2x, \quad d^{10}f(0). \quad (\text{Ответ: } d^{10}f(0) = 0).$$

$$2. f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}, \quad d^2f(1). \quad (\text{Ответ: } d^2f(1) = 7,5 dx^2).$$

$$3. f(x) = (x - \sin x)^2, \quad d^{16}f\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

$$(\text{Ответ: } d^{16}f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(16 - \frac{\pi}{4} \right) dx^{16}).$$

$$4. \quad f(x) = x(\cos \ln x + \sin \ln x), \quad d^2 f(x).$$

$$(\text{ОТВЕТ: } d^2 f(x) = -\frac{2 \sin \ln x}{x} dx^2).$$

$$5. \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 3x^3}, \quad d^5 f(1).$$

$$(\text{ОТВЕТ: } d^5 f(1) = -\frac{95 \cdot 3^5}{2^{14}} dx^5).$$

$$6. \quad f(x) = \frac{x^2}{1-x}, \quad d^6 f(0).$$

$$(\text{ОТВЕТ: } d^6 f(0) = 720 dx^6).$$

$$7. \quad f(x) = x^{2x}, \quad d^2 f(1).$$

$$(\text{ОТВЕТ: } d^2 f(1) = 6 dx^2).$$

$$8. \quad f(x) = 3x^4 + 2x^3 + \lg(2x + 3), \quad d^5 f(x).$$

$$(\text{ОТВЕТ: } d^5 f(x) = \frac{768 dx^5}{\ln 10 (2x + 3)^5}).$$

$$9. \quad f(x) = (3x^2 - 4x + 1)e^{2x}, \quad d^3 f(0).$$

$$(\text{ОТВЕТ: } d^3 f(0) = -4 dx^3).$$

$$10. \quad f(x) = (x + 1)(\sin 2x + \cos 2x), \quad d^6 f(0).$$

$$(\text{ОТВЕТ: } d^6 f(0) = 128 dx^6).$$

$$11. \quad f(x) = (2x + 1) \ln^2(2x + 1), \quad d^3 f(x).$$

$$(\text{ОТВЕТ: } d^3 f(x) = \frac{-16 \ln(2x + 1)}{(2x + 1)^2} dx^3).$$

$$12. \quad f(x) = (x^2 - 2x + 2) \sin 2x, \quad d^8 f(0).$$

$$(\text{ОТВЕТ: } d^8 f(0) = 2048 dx^8).$$

7.24. Найти $d^2 y$, считая известными du , dv , $d^2 u$, $d^2 v$.

$$1. \quad y = \frac{u + 1}{v + 1}.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } d^2 y =$$

$$= \frac{(v + 1)^2 d^2 u - (u + 1)(v + 1) d^2 v - 2(v + 1) du dv + 2(u + 1) dv^2}{(v + 1)^3}).$$

$$2. \quad y = (u + 1)e^{v-1}.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } d^2y = e^{v-1}(2 \, du \, dv + (u + 1) \, dv^2 + d^2u + (u + 1) \, d^2v)).$$

$$3. \quad y = \frac{4u - 3v}{v}.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } d^2y = \frac{4}{v^3}((v \, d^2u - u \, d^2v)v - 2(v \, du - u \, dv) \, dv)).$$

$$4. \quad y = 2^{u+v}.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } d^2y = 2^{u+v} \ln^2 2 (du + dv)^2 + 2^{u+v} \ln 2 (d^2u + d^2v)).$$

$$5. \quad y = \operatorname{arccotg} \frac{u}{v}.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } d^2y = \frac{u \, d^2v - v \, d^2u}{u^2 + v^2} - \frac{2(u \, dv - v \, du)(u \, du + v \, dv)}{(u^2 + v^2)^2}).$$

$$6. \quad y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}.$$

$$(\text{ОТВЕТ: } d^2y = \frac{u \, d^2u + du^2 + dv^2 + v \, d^2v}{u^2 + v^2} - \frac{2(u \, du + v \, dv)^2}{(u^2 + v^2)^2}).$$

7.25. Для функции $y = f(x)$ найти d^2y в двух случаях:
 а) x независимая переменная; б) x промежуточный аргумент.

$$1. \quad f(x) = \operatorname{ctg} x^2. \quad (\text{ОТВЕТ: а) } d^2y = \frac{8x^2 \cos x^2 - 2 \sin x^2}{\sin^3 x^2} dx^2;$$

$$\text{б) } d^2y = \frac{8x^2 \cos x^2 - 2 \sin x^2}{\sin^3 x^2} dx^2 - \frac{2x}{\sin^2 x^2} d^2x).$$

$$2. \quad f(x) = \frac{x + 1}{x^2}. \quad (\text{ОТВЕТ: а) } d^2y = \frac{2x + 6}{x^4} dx^2;$$

$$\text{б) } d^2y = \frac{2x + 6}{x^4} dx^2 - \frac{x + 2}{x^3} d^2x).$$

$$3. \quad f(x) = \arcsin x. \quad (\text{ОТВЕТ: а) } d^2y = \frac{x}{(1 - x^2)^{3/2}} dx^2;$$

$$\text{б) } d^2y = \frac{x}{(1 - x^2)^{3/2}} dx^2 + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} d^2x).$$

4. $f(x) = 1 - 2 \operatorname{ch} 3x$. (Ответ: а) $d^2y = -18 \operatorname{ch} 3x \, dx^2$;
б) $d^2y = -18 \operatorname{ch} 3x \, dx^2 - 6 \operatorname{sh} 3x \, d^2x$).
5. $f(x) = e^{3x}$. (Ответ: а) $d^2y = 9e^{3x} \, dx^2$;
б) $d^2y = 9e^{3x} \, dx^2 + 3e^{3x} \, d^2x$).
6. $f(x) = \sin^2 2x + 4 \cos^2 2x$. (Ответ: а) $d^2y = -24 \cos 4x \, dx^2$;
б) $d^2y = -24 \cos 4x \, dx^2 - 6 \sin 4x \, d^2x$).
7. $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$. (Ответ: а) $d^2y = -\frac{16x}{(1+4x^2)^2} \, dx^2$;
б) $d^2y = -\frac{16x}{(1+4x^2)^2} \, dx^2 + \frac{2}{1+4x^2} \, d^2x$).
8. $f(x) = (x^2 - 2x) \ln x$.
(Ответ: а) $d^2y = \left(2 \ln x + 3 - \frac{2}{x}\right) \, dx^2$;
б) $d^2y = \left(2 \ln x + 3 - \frac{2}{x}\right) \, dx^2 + ((2x - 2) \ln x + x - 2) \, d^2x$).

7.26. Используя правило Лопиталя, найти пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x} - 3}$. (Ответ: $-1/2$).
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$. (Ответ: $-1/2$).
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\cos 4x - e^{-2x}}$. (Ответ: $3/2$).
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x - 2x}{x - \sin x}$. (Ответ: 8).
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{3x - \ln(1+3x)}$. (Ответ: $4/9$).
6. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x}$. (Ответ: $1/2$).

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\operatorname{tg}^2 x}.$ (ОТВЕТ: $3/2$).
8. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin 2x}{\operatorname{ctg} 2x}.$ (ОТВЕТ: 0).
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x^2 - \sin^4 x}{x \cos x - \sin x}.$ (ОТВЕТ: -3).
10. $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} x}{\ln \left(1 - \frac{x}{2}\right)}.$ (ОТВЕТ: $-\infty$).
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - x^3 - 6 \sin x}{x^5 + 2x^6 + x^7}.$ (ОТВЕТ: $-1/20$).
12. $\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{\ln(x-3)}{\ln(e^x - e^3)}.$ (ОТВЕТ: 1).
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}.$ (ОТВЕТ: $1/2$).
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x^2} \right).$ (ОТВЕТ: $1/3$).
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}.$ (ОТВЕТ: 0).
16. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right).$ (ОТВЕТ: -1).
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 3^{\sin x}}{x^3}.$ (ОТВЕТ: $\frac{\ln 3}{6}$).
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos 2x - 2x}{e^{5x} - \cos 5x - 5x}.$ (ОТВЕТ: $4/25$).
19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - x^x}.$ (ОТВЕТ: $1/2$).
20. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{1 - \sin x} \right).$ (ОТВЕТ: $-\infty$).
21. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2}{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}.$ (ОТВЕТ: $3/2$).

22. $\lim_{x \rightarrow 3\pi/4} \frac{1 + \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{1 - 2 \cos^2 x}$. (ОТВЕТ: $-1/3$).
23. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{4x^2 - 7x - 2}$. (ОТВЕТ: $4/9$).
24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{\operatorname{tg}^3 x}$. (ОТВЕТ: $1/6$).
25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{\cos x}}{2(1+x)^{3/2} - 3x - 2}$. (ОТВЕТ: $-1/3$).
26. $\lim_{x \rightarrow \pi+0} \frac{\ln(-\sin x)}{\ln \operatorname{ctg} x}$. (ОТВЕТ: -1).
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{ch} x}{1 - \cos 2x} - \frac{1}{2x^2} \right)$. (ОТВЕТ: $5/12$).
28. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 13x + 11} \ln \left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right)$. (ОТВЕТ: $2/\pi$).
29. $\lim_{x \rightarrow 1/2} \operatorname{tg} \pi x \left(\operatorname{arctg} 2x - \frac{\pi}{4} \right)$. (ОТВЕТ: $-1/\pi$).
30. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh} \frac{x}{x^2 + 4} \ln(x^2 + x + 1 + e^{2x})$. (ОТВЕТ: 2).
31. $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$. (ОТВЕТ: 1).
32. $\lim_{x \rightarrow +0} x^{1/\ln(e^x - 1)}$. (ОТВЕТ: e).
33. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}$. (ОТВЕТ: $e^{-1/6}$).
34. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$. (ОТВЕТ: 1).
35. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{1/x^2}$. (ОТВЕТ: $e^{-1/3}$).
36. $\lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$. (ОТВЕТ: 1).
37. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$. (ОТВЕТ: e^{-1}).

38. $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{sh} x)^{\ln(1-x)},$ (Ответ: 1).
39. $\lim_{x \rightarrow 5} (e^{3x-15} + 5 - x)^{5/\sin \pi x},$ (Ответ: $e^{-10/\pi}$).
40. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (14x + 3^x)^{\frac{\sqrt{x}+3}{x\sqrt{x+14}}},$ (Ответ: 3).
41. $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ch} x - 1)^{1/\ln \operatorname{sh} x},$ (Ответ: e^2).
42. $\lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{\frac{\cos x + \sin x}{\ln \sin x}},$ (Ответ: e).
43. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 4x)^{1/\ln(1-\cos 6x)},$ (Ответ: e).
44. $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{2x+1}{\sin^2 3x} \right)^{1/\ln 5x},$ (Ответ: e^{-2}).
45. $\lim_{x \rightarrow e} (1 + \ln \ln x)^{1/(1-\ln x)},$ (Ответ: e^{-1}).
46. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - x)^{1/x},$ (Ответ: $e^{-1/2}$).
47. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{1/x},$ (Ответ: 1).
48. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 13x)^{13/\ln x},$ (Ответ: 1).
49. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{\cos x} - 2x \operatorname{tg} x \right),$ (Ответ: 2).

7.27. Используя формулу Тейлора, найти пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \ln(1+x) - \sin x^2},$ (Ответ: $-2/3$).
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{\operatorname{tg}^2 x + 1 - \cos 2x},$ (Ответ: $2/3$).
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{xe^{-x^2} + \ln(1-x) + x^2/2},$ (Ответ: -3).
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x^2} + 2x^3 - 1}{\ln \cos x},$ (Ответ: $-1/2$).

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} + \ln \cos x^2 - x^2 - 1}{\sqrt{1 + \sin^2 x} - \frac{x^2}{2} - 1}$. (Ответ: 4/7).
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1)e^{1/x} - \sqrt[4]{x^{12} - x^9 + 2} \right)$. (Ответ: 17/12).
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x - \ln(1 + x^2) - \arcsin x^3}{x \sin x - x^2}$. (Ответ: -6).
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg} 4x^2}{e^{\arcsin 2x} - e^{2 \sin x} - \frac{5}{3}x^3}$. (Ответ: 16/5).
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x + 2x \sin 2x) - 2x^2 e^{2x}}{x \sqrt[3]{1 - 2x} + \sqrt{1 + \frac{4}{3}x^2} - \sin x - 1}$. (Ответ: 75/5).
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x \sin 2x} + \ln \cos 4x^2 - 4x^2 - 1}{\sqrt{1 + \sin^2 2x} - 1 - 2x^2}$. (Ответ: 4/7).
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 e^{x^2} - \ln(1 + x^4) - \arcsin x^6}{\operatorname{ch}(\sin x^2) - e^{x^4/2}}$. (Ответ: -4).
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \sqrt{1 + x^3} - x \ln(1 + x)}{\sin x^2 - \sin^2 x}$. (Ответ: 1/2).
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - \sqrt{1 + 4x^2} - 2x \cos 2x}{(\ln(x + 2) - \ln 2)^3}$. (Ответ: 32).
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sin 2x^3} - \ln(1 - x^3) - 1}{\sin 2x^3 - \operatorname{tg} 2x^3}$. (Ответ: -1/8).
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \operatorname{ch} \frac{x^2}{2} - x^2}{x^2 e^{\sin x^2} - x^2}$. (Ответ: 3/8).
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sqrt{1 - x} - \frac{x}{2}}{x^2 \operatorname{tg} x - x e^{-x^2} + x}$. (Ответ: 1/32).
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2 \sin x) - 2x \sin x - e^{-2x} - \sqrt[3]{1 - 9x^3}}{\ln^2(\sqrt{\cos x})}$. (Ответ: 16).

18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \ln(\sin 2x + \sqrt{1 + 4x^2})}{\operatorname{tg} 3x - 3x \cos^2 3x}.$ (ОТВЕТ: 1/27).
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{(x + 1)\sqrt{9 + 2x^2} - (2x + 3)\sqrt[3]{1 + x}}.$ (ОТВЕТ: 27/20).
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - e^{x/2} \sin \frac{x}{2}}{\ln \frac{\sin 3x}{3x}}.$ (ОТВЕТ: 1/6).
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x} \ln(1 + 2x) - \frac{2x}{2x + 1}}{(e^{-x} - e^x) \sin(2 - \sqrt{4 + x^2})}.$ (ОТВЕТ: -26/3).
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sin^2 2x - 2xe^{\operatorname{sh} 2x}}{\operatorname{tg} x - x \operatorname{ch}^2 x}.$ (ОТВЕТ: 6).
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1 + 2x^3} - \cos x^4}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}.$ (ОТВЕТ: 3).
24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} \sin x + x \ln \cos x - \operatorname{tg} x + x^3}{x(1 - \sqrt{\cos x^2})}.$ (ОТВЕТ: -67/30).
25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x} \ln(1 + 2x) - \frac{2x}{2x + 1}}{\operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x}.$ (ОТВЕТ: 13).
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x/\sqrt{1+x^2}} - \operatorname{ch} \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} \operatorname{sh} x}{\ln(1 + x^2) - x^2}.$ (ОТВЕТ: 2/3).
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x + 3 \cos x - 3\sqrt[3]{1 + x}}{1 + \ln(1 - 2x) - e^{-2x}}.$ (ОТВЕТ: 7/24).
28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x + x \sin \sin x + 4 \ln \cos x}{1 - \sqrt{1 + \sin^2 x^2}}.$ (ОТВЕТ: 2/3).
29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} + \ln(1 - x) - 1}{4 - \sqrt{16 + x^3}}.$ (ОТВЕТ: -4/3).
30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} \sin x + \ln(1 - \sin x) + \sqrt{1 + x^2} - 1 + \frac{x^3}{6}}{e^{\operatorname{tg} x^4} - 1}.$ (ОТВЕТ: -5/24).

31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - xe^{\sin x}}{\ln \cos x}$. (Ответ: 2).
32. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - 2x} - x}{x^2 \operatorname{tg} x - e^{-x^3} + 1}$. (Ответ: 1/4).
33. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1 + \sin x} + \ln(1 - x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$. (Ответ: -11/12).
34. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1 + x^2} - x \cos x}{\ln^3(1 - x)}$. (Ответ: -1/2).
35. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - e^x \sin x}{\ln \frac{\sin x}{x}}$. (Ответ: 6).
36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 + 2x} - 1}{\sqrt[4]{1 + x} - \sqrt{1 - x}}$. (Ответ: 8/15).
37. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \sqrt{1 + 2x^2}}{\operatorname{tg}^4 x}$. (Ответ: 1).
38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - x^2} - x \operatorname{ctg} x}{x \sin x}$. (Ответ: 0).
39. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{1 + x^2} - x) + \operatorname{tg} x}{x(\operatorname{ch} x - e^{x^2})}$. (Ответ: -1).
40. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{\operatorname{tg} x} - \sin^2 x - x}{x + x^3 - \operatorname{tg} x}$. (Ответ: 3/4).
41. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + x - \frac{x^2}{6}\right) - \operatorname{sh} x + \frac{2}{3}x^2}{\sin 2x - 2x \cos x}$. (Ответ: -1).
42. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(\sin x + \sqrt{1 + x^2})}{\operatorname{tg} x - x \cos^2 x}$. (Ответ: 1/8).
43. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} - \sqrt{1 + \sin x^2} - \frac{x^2}{2}}{\ln \cos x^2}$. (Ответ: -11/12).
44. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - xe^{x^2} \ln(\sin x + \sqrt{1 + x^2})}{x\sqrt{1 - x^2} - \operatorname{tg} x}$. (Ответ: 1).

45. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \ln \frac{\sin x}{x} - x}{e^x \sin x - x},$ (ОТВЕТ: $1/6$).
46. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x + 3 \cos x - 3\sqrt[3]{1+x}}{1 + \ln(1+x) - e^x},$ (ОТВЕТ: $7/6$).
47. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x - \sin \sin x + x}{x e^{\sin x} - x},$ (ОТВЕТ: $-1/2$).
48. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x) - \ln(x + \sqrt[3]{1+x^2}) - \frac{x^2}{6}}{\operatorname{th}(x - x^3) - x},$ (ОТВЕТ: $-1/8$).
49. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3} - x \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}x^2}{x \cos x - \sin x},$ (ОТВЕТ: -1).
50. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - \frac{x^2}{2} - 1 + \ln \cos x^2}{e^{x \sin x} - x^2 - 1},$ (ОТВЕТ: $-19/8$).
51. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \operatorname{tg} x} - \sqrt{1+2x} - x(x+x^2)}{x - \operatorname{arctg} x},$ (ОТВЕТ: -3).
52. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sin x} - \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) - 1}{\operatorname{tg} x - \sin x},$ (ОТВЕТ: $1/8$).
53. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - x - \operatorname{ch} x}{\sin x - \operatorname{arctg} x},$ (ОТВЕТ: 3).
54. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\ln(1+x)}{1+x}\right) - \operatorname{tg}(x - 2x^2)}{\sqrt{4+x^3} - 2},$ (ОТВЕТ: $40/3$).
55. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \ln(1 - \sin x) - 1}{\sqrt[3]{8 - x^4} - 2},$ (ОТВЕТ: $1/2$).
56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x - \ln(1+x^2) - \arcsin x^3}{\operatorname{ch}(\sin x) - e^{x^2/2}},$ (ОТВЕТ: -4).

ГЛАВА 8. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

8.1. СТАЦИОНАРНЫЕ ТОЧКИ ФУНКЦИИ

Пусть функция f задана на промежутке I . Точка $c \in I$ называется *стационарной точкой* функции f , если функция дифференцируема в этой точке и при этом $f'(c) = 0$.

Из определения следует, что стационарная точка — внутренняя точка множества задания функции (так как $\exists f'(c)$).

В стационарной точке касательная параллельна оси абсцисс, уравнение этой касательной $y = f(c)$.

Теорема Ферма. Если функция f задана на промежутке I , принимает во внутренней точке $c \in I$ наибольшее либо наименьшее значение на I и дифференцируема в точке c , то c стационарная точка функции f , т. е. $f'(c) = 0$.

Отметим, что наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке I называются *экстремальными значениями*.

Замечание. Если точка c стационарная, то еще не следует, что функция f принимает в этой точке экстремальное значение.

Пример 8.1. Найти стационарные точки, наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3$, $x \in [-1; 1]$.

Решение. Поскольку $f'(x) = 3x^2$ и $f'(x) = 0$ при $x = 0$, то точка $x = 0$ — стационарная, причем $f(0) = 0$. Наибольшее значение функции $f(1) = 1$, наименьшее $f(-1) = -1$, при этом $f'_-(1) = 3 \neq 0$, $f'_+(-1) = 3 \neq 0$.

Теорема Ролля. Пусть:

- 1) $f \in C([a; b])$ (f непрерывна на отрезке $[a; b]$);
- 2) $f \in D((a; b))$ (f дифференцируема на интервале $(a; b)$);
- 3) $f(a) = f(b)$ (функция принимает равные значения на концах отрезка $[a; b]$).

Тогда на интервале $(a; b)$ существует стационарная точка, т. е. $\exists c, a < c < b, f'(c) = 0$.

Замечание. Теорема Ролля гарантирует существование стационарной точки, но не единственность.

Пример 8.2. Найти стационарные точки функции $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ на отрезке $[-3; 3]$.

Решение. Проверим выполнение условий теоремы Ролля: 1) функция непрерывна на интервале $(-3; 3)$; 2) дифференцируема на интервале $(-3; 3)$; 3) $f(3) = f(-3)$ в силу четности функции.

Все условия выполнены. Найдем стационарные точки:

$$f'(x) = 4x^3 - 10x, \quad 4x^3 - 10x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - \frac{5}{2}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что $x = 0, x = \sqrt{5/2}, x = -\sqrt{5/2}$ стационарные точки функции f на интервале $(-3; 3)$.

Нулями функции f являются значения $-2, -1, 1, 2$, при этом

$$-2 < -\sqrt{5/2} < -1 < 0 < 1 < \sqrt{5/2} < 2.$$

Это иллюстрирует более общий результат: при выполнении условий 1), 2) теоремы Ролля между двумя нулями функции существует нуль производной.

Пример 8.3. Найти стационарные точки функции $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

Решение. Отметим, что $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, это уравнение параболы. Стационарной точкой будет x_0 : $2ax_0 + b = 0$, т. е. $x_0 = -\frac{b}{2a}$ абсцисса вершины параболы.

Если уравнение $ax^2 + bx + c, a \neq 0$, имеет действительные корни x_1, x_2 , то $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, т. е. стационарная точка среднее арифметическое действительных корней.

Напоминание. Выражение $f \in D([a; b])$ означает:

1) $f \in D((a; b))$ (f имеет конечную производную на интервале $(a; b)$);

2) $f'_+(a), f'_-(b) \in \mathbb{R}$ (правосторонняя и левосторонняя производные конечны).

Теорема Дарбу. Если $f \in D([a; b])$, то $E(f')$ (множество значений производной) есть промежуток.

В частности, теорема Дарбу утверждает следующее.

Если $f'_+(a) \cdot f'_-(b) < 0$, то $\exists c, a < c < b$, где $f'(c) = 0$ (c стационарная точка).

Упражнение 8.1. Найти стационарные точки функции f .

1. $f(x) = x^2 - 10 \ln x.$ (Ответ: $c = \sqrt{5}$).

2. $f(x) = -4x^2 - 4x - 1.$ (Ответ: $c = -\frac{1}{2}$).

3. $f(x) = x^3 - 3x.$ (Ответ: $c = -1, c = 1$).

4. $f(x) = \cos \frac{x}{2} - 3x + 8.$ (Ответ: нет стационарных точек).

5. $f(x) = \sin x - x.$ (Ответ: $c = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$).

6. $f(x) = x^3 + x + 2.$ (Ответ: нет стационарных точек).

Упражнение 8.2. Найти абсциссу x_0 вершины параболы.

1. $y = x^2 - 6x + 1.$ (Ответ: $x_0 = 3$).

2. $y = x^2 + 3x.$ (Ответ: $x_0 = -\frac{3}{2}$).

3. $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x.$ (Ответ: $x_0 = 3$).

4. $y = -x^2 + 8x.$ (Ответ: $x_0 = 4$).

5. $y = x^2 + 2x + 3.$ (Ответ: $x_0 = -1$).

8.2. МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ

Функция f называется *монотонной на промежутке I* , если $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, выполняется одно из условий:

- 1) $f(x_1) \leq f(x_2)$ возрастает;
- 2) $f(x_1) \geq f(x_2)$ убывает.

В частности:

- а) $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ строго возрастает;
- б) $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ строго убывает.

Критерий постоянства дифференцируемой функции на промежутке. Если функция f непрерывна на промежутке I и дифференцируема во всех внутренних точках этого промежутка, то функция f постоянна тогда и только тогда, когда во всех внутренних точках промежутка $f'(x) = 0$.

Критерий монотонности дифференцируемой функции. Пусть функция f непрерывна на промежутке I и дифференцируема во внутренних точках этого промежутка, за исключением, может быть, конечного числа точек. Функция возрастает (убывает) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) во всех точках, где существует производная $f'(x)$.

Пример 8.4. Известно, что производная функции f на отрезке $[-7; 8]$ меняет свой знак, причем $f'(x) < 0$ на промежутке $[-7; 2)$ и $f'(x) > 0$ на промежутке $(2; 8]$. Описать характер поведения функции на отрезке $[-7; 8]$.

Решение. Поскольку $f'(x) < 0$ на промежутке $[-7; 2)$, то функция убывает на $[-7; 2)$. А так как $f'(x) > 0$ на промежутке $(2; 8]$, то функция на $(2; 8]$ возрастает.

Пример 8.5. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = (x - 1)^2$.

Решение. Функция $f(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема на $\mathbb{R}$. Поскольку $f'(x) = 2(x - 1)$, $x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1$, и $f'(x) < 0$ для $x < 1$, $f'(x) > 0$ для $x > 1$, то функция f убывает на $(-\infty; 1)$ и возрастает на $(1; +\infty)$.

Пример 8.6. Что можно сказать об угловом коэффициенте касательной к графику функции, если известно, что функция а) возрастает; б) убывает?

Ответ: а) неотрицательный; б) неположительный.

Пример 8.7. При каких значениях параметра a функция $f(x) = \frac{a^2 - 1}{3}x^3 + (a - 1)x^2 + 2x$ возрастает на всей числовой прямой?

Решение.

1. Рассмотрим случай $a^2 - 1 = 0$. При $a = 1$ имеем $f'(x) = 2$ функция возрастает на $\mathbb{R}$. При $a = -1$ получим $f'(x) = -4x + 2$, $f'(x)$ меняет знак в точке $x = 1/2$, значит, $f(x)$ не является монотонной на $\mathbb{R}$.

2. Если $a^2 \neq 1$, то

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a^2 - 1 \geq 0, \\ 4(a - 1)^2 - 8(a^2 - 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| \geq 1, \\ (a - 1)(-a - 3) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a \geq 1, \\ a \leq -1, \\ (a - 1)(a + 3) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (a \geq 1 \text{ или } a \leq -3) \Rightarrow a \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty). \end{aligned}$$

Пример 8.8. Определить промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \frac{3x^2}{4 - x^2}$.

Решение. Рассматриваемая функция существует при всех x , кроме $x = 2$ и $x = -2$, т.е. множество ее определения $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

Найдем производную функции:

$$f'(x) = 3 \frac{2x(4 - x^2) + x^2 \cdot 2x}{(4 - x^2)^2} = \frac{24x}{(4 - x^2)^2}.$$

Знаменатель последней дроби положителен при всех значениях x , кроме $x = \pm 2$. Дробь положительна при $x > 0$. Следовательно, функция возрастает на $(0; 2)$ и $(2; +\infty)$. На $(-\infty; -2)$ и $(-2; 0)$ дробь отрицательна и функция убывает.

Упражнение 8.3. Найти промежутки возрастания и убывания функции.

1. $f(x) = 2x + \cos x$. (Ответ: на $\mathbb{R}$ возрастает).

2. $f(x) = x^3 - 3x$. (Ответ: на $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$ возрастает, на $(-1; 1)$ убывает).

3. $f(x) = x^2 + 2x + 3$. (Ответ: на $(-\infty; -1)$ убывает, на $(-1; +\infty)$ возрастает).

4. $f(x) = 4x^3 + 12$. (Ответ: на $\mathbb{R}$ возрастает).

5. $f(x) = \frac{(3-x)^3}{(x-2)^2}$. (Ответ: на $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$ убывает, на $(0; 2)$ возрастает).

6. $f(x) = x^2 e^{-x^2}$. (Ответ: на $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$ возрастает, на $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$ убывает).

7. $f(x) = 4x^2 + x$. (Ответ: на $(-1/8; +\infty)$ возрастает, на $(-\infty; -1/8)$ убывает).

8.3. ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Пусть функция f задана на промежутке I .

Говорят, что функция f имеет во внутренней точке $x_0 \in I$ *локальный максимум* (*локальный минимум*), если существует такой интервал $(\alpha; \beta) \subset I$, $\alpha < x_0 < \beta$, что для всех $x \in (\alpha; \beta)$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$). Если же выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, $x \neq x_0$ ($f(x) > f(x_0)$),

то функция f имеет строгий локальный максимум (строгий локальный минимум).

Общее название локальных максимумов и локальных минимумов — *локальные экстремумы*, x_0 — точка локального экстремума, $f(x_0)$ — локальный экстремум.

Таким образом, локальные экстремумы функции — это наибольшее и наименьшее значения функции в некоторой окрестности точки x_0 .

Если $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приращение функции f в точке x_0 , то x_0 будет точкой строгого локального максимума (строкого локального минимума) тогда и только тогда, когда $\Delta f(x_0) < 0$ ($\Delta f(x_0) > 0$) при $x_0 + \Delta x \in \dot{U}(x_0)$, где $\dot{U}(x_0)$ — проколота окрестность точки x_0 .

Если же $\Delta f(x_0)$ имеет разные знаки при $\Delta x < 0$ и $\Delta x > 0$, то в точке x_0 нет локального экстремума.

Необходимое условие локального экстремума. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.

Точки, в которых производная функции f равна нулю или не существует, но функция при этом непрерывна, называются *критическими точками функции*.

Для исследования наличия локального экстремума в критических точках используются достаточные условия.

Достаточные условия локального экстремума. Пусть непрерывная на промежутке I функция имеет на I конечное число критических точек. Эти точки разбивают промежутки I на конечное число промежутков, внутри каждого из которых f' сохраняет определенный знак (следует из теоремы Дарбу).

Пусть x_0 — критическая точка функции f и $(\alpha; x_0)$, $(x_0; \beta)$ — соседствующие с ней промежутки.

Первое правило. Если x_0 — критическая точка функции f , а f' на промежутках $(\alpha; x_0)$, $(x_0; \beta)$ принимает значения разных знаков, то точка x_0 — точка строгого локального экстремума, при этом:

1) если f' меняет знак с «+» на «-», то x_0 — точка строгого локального максимума;

2) если f' меняет знак с «-» на «+», то x_0 — точка строгого локального минимума.

Если же f' при переходе через точку x_0 не меняет знак, то критическая точка x_0 не является точкой локального экстремума, и функция f строго монотонна на $(\alpha; \beta)$.

Пример 8.9. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1.$$

Решение. Найдем производную: $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x \times (x - 1)$. Решим уравнение $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x - 1) = 0$, получим критические (стационарные) точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Множество $\mathbb{R}$ задания функции стационарными точками делится на интервалы $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$.

Исследуем точку $x_1 = 0$. Поскольку $f'(-1) > 0$, а $f'(1/2) < 0$, то $x_1 = 0$ — точка локального максимума, $f(0) = 1$.

Исследуем точку $x_2 = 1$. Так как $f'(1/2) < 0$, а $f'(2) > 0$, то $x_2 = 1$ — точка локального минимума, $f(1) = 0$.

Пример 8.10. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^3$.

Решение. Поскольку $f'(x) = 3x^2$, $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и $f'(x) > 0$ при $x \neq 0$, то стационарная точка $x = 0$ не является точкой экстремума. Функция f строго возрастает на $\mathbb{R}$.

Второе правило. Пусть x_0 — стационарная точка функции f и существует $f''(x_0) \neq 0$. Тогда функция f имеет в точке x_0 локальный экстремум: при $f''(x_0) > 0$ — локальный минимум, при $f''(x_0) < 0$ — локальный максимум.

Пример 8.11. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2.$$

Решение. Найдем производную: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Решая уравнение $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$, определим стационарные точки $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Найдем вторую производную: $f''(x) = 6x - 6$.

Поскольку $f''(-1) < 0$, то точка $x_1 = -1$ — точка локального максимума, $f(-1) = 7$. А так как $f''(3) > 0$, то точка $x_2 = 3$ — точка локального минимума, $f(3) = -25$.

Третье правило. Пусть функция f n раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0 ; x_0 — стационарная точка функции f и $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

1) если $n = 2m$ (n — четное число), то x_0 — точка локального экстремума: при $f^{(2m)}(x_0) > 0$ — точка локального минимума, при $f^{(2m)}(x_0) < 0$ — точка локального максимума;

2) если $n = 2m - 1$ (n — нечетное число), то точка x_0 не является точкой локального экстремума и функция строго монотонна в окрестности точки x_0 .

Пример 8.12. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = 5x^4.$$

Решение. Поскольку $f'(x) = 20x^3$, то $x = 0$ — стационарная точка. А так как $f''(x) = 60x^2$, $f'''(x) = 120x$, $f^{(4)}(x) = 120$ и $f^{(4)}(x) > 0$, то $x = 0$ — точка локального минимума, $f(0) = 0$.

Пример 8.13. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = 2x^5 + 1.$$

Решение. Так как $f'(x) = 10x^4$, то $x = 0$ — стационарная точка. Найдем $f''(x) = 40x^3$, $f'''(x) = 120x^2$, $f^{(4)}(x) = 240x$, $f^{(5)}(x) = 240$. Поскольку $f^{(5)}(x) \neq 0$ и 5 — нечетное число, то точка $x = 0$ не является экстремальной.

Пример 8.14. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Решение. Можно доказать, что все производные функции в точке $x = 0$ равны нулю: $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n$. В то же время очевидно, что $f(x) > 0$ при $x \neq 0$. Значит, в точке $x = 0$ функция имеет минимум.

Замечание. Рассмотрим функцию f , заданную и непрерывную на промежутке $I = (a; b)$. Пусть f дифференцируема, т. е. имеет конечную (двустороннюю) производную во всех точках промежутка I , кроме точки $x_0 \in I$. Точка x_0 может, в частности, оказаться либо *угловой точкой* (односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ существуют, конечны, но различны), либо *точкой острия* ($f'_\pm(x_0)$ бесконечны и противоположны по знаку) графика $y = f(x)$.

Локальный экстремум функции f в точках недифференцируемости называется *острым экстремумом*.

Пример 8.15. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = x^{2/3}(1 - x).$$

Решение. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на $\mathbb{R}$.

Найдем производную:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}(1 - x) + x^{2/3}(-1) = \frac{2 - 5x}{3x^{1/3}}, \quad x \neq 0.$$

Отсюда следует, что точка $x = 2/5$ — стационарная. Так как при переходе через точку $x = 2/5$ производная f' меняет знак с «+» на «-», то это точка локального максимума, $f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{2/3}$.

Исследуем дифференцируемость функции f в точке $x_0 = 0$ по определению:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^{2/3}(1 - \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \Delta x}{(\Delta x)^{1/3}}. \end{aligned}$$

Поскольку $f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(0) = -\infty$, то точка $x_0 = 0$ является точкой острия и точкой локального острого минимума, $f(0) = 0$.

Упражнение 8.4. Исследовать на локальный экстремум функции.

1. $f(x) = (x + 1)^5 e^{-x}$.

(Ответ: 4 точка локального максимума, $f(4) = 5^5 e^{-4}$).

2. $f(x) = \frac{(2 - x)^3}{(3 - x)^2}$.

(Ответ: 5 точка локального максимума, $f(5) = -\frac{27}{4}$).

3. $f(x) = \sqrt[3]{(x - 2)^2(x - 4)^2}$.

(Ответ: 3 точка локального максимума, $f(3) = 1$;

2 и 4 точки локального минимума, $f(2) = f(4) = 0$).

4. $f(x) = \frac{x^4}{(x + 1)^3}$.

(Ответ: 4 точка локального максимума, $f(4) = -\frac{256}{27}$;

0 точка локального минимума, $f(0) = 0$).

5. $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$.

(Ответ: e^2 точка локального максимума, $f(e^2) = 4e^{-2}$;

1 точка локального минимума, $f(1) = 0$).

6. $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$.

(Ответ: -1 точка локального максимума, $f(-1) = \frac{\pi}{2} - 1$;

1 точка локального минимума, $f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$).

8.4. ГЛОБАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Рассмотрим функцию f , заданную и непрерывную на промежутке I .

Наибольшее $M = \max f(x)$ и наименьшее $m = \min f(x)$ значения функции f на промежутке I , если они существуют, называют ее *экстремальными значениями* на промежутке I .

Экстремальные значения функции f на промежутке I называют *глобальными экстремумами*.

Значения аргумента, при которых функция достигает экстремальных значений, называются *точками глобального экстремума*.

8.4.1. Глобальный экстремум функции на отрезке

Теорема Вейерштрасса. Непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция f принимает на этом же отрезке наибольшее M и наименьшее m значения, т. е. $\exists c, d \in [a; b]$ такие, что

$$m = f(c) \leq f(x) \leq f(d) = M \quad \forall x \in [a; b].$$

Правило нахождения экстремальных значений непрерывной на отрезке функции.

1. Найти критические точки x_k функции, принадлежащие интервалу $(a; b)$.
2. Вычислить $f(x_k)$, $f(a)$, $f(b)$.
3. Из всех полученных значений функции выбрать наибольшее $M = \max\{f(x_k), f(a), f(b)\}$ и наименьшее $m = \min\{f(x_k), f(a), f(b)\}$.

Пример 8.16. Найти глобальные экстремумы функции $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ на отрезке $[-1; 2]$.

Решение.

1. $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3) \Rightarrow f'(x) = 0$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ (стационарные точки). Отметим, что точка $x_3 = 3 \notin [-1; 2]$.
2. $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(-1) = -10$, $f(2) = -7$.
3. $M = \max_{[-1; 2]} f(x) = 2$, $m = \min_{[-1; 2]} f(x) = -10$.

Пример 8.17. Найти глобальные экстремумы функции $f(x) = (x - 2)^2 e^{|x|}$ на отрезке $[-2; 3]$.

Решение.

$$1. f'(x) = 2(x - 2)e^{|x|} + (x - 2)^2 e^{|x|} \operatorname{sgn} x = e^{|x|}(x - 2)(2 + (x - 2)\operatorname{sgn} x), \quad x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} e^x(x - 2)x, & x > 0, \\ e^{-x}(x - 2)(4 - x), & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 2 \in [-2; 3]$ стационарная точка.

$$2. f(2) = 0, \quad f(0) = 4, \quad f(-2) = 16e^2, \quad f(3) = e^3.$$

$$3. M = \max_{[-2; 3]} f(x) = 16e^2, \quad m = \min_{[-2; 3]} f(x) = 0.$$

Упражнение 8.5. Найти глобальные экстремумы функции f на отрезке $[a; b]$.

$$1. f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5, \quad [-1; 1]. \quad (\text{Ответ: } M = 10, \quad m = 5).$$

$$2. f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5, \quad [-1; 1]. \quad (\text{Ответ: } M = 0, \quad m = -5).$$

$$3. f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5, \quad [1; 2]. \quad (\text{Ответ: } M = 23, \quad m = 0).$$

$$4. f(x) = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}, \quad [0; 1]. \quad (\text{Ответ: } M = 1, \quad m = \frac{3}{5}).$$

$$5. f(x) = 2 \cos x + \cos 2x, \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right].$$

$$(\text{Ответ: } M = 3, \quad m = -\frac{3}{2}).$$

$$6. f(x) = (x - 2)^2 e^{|x|}, \quad [-1; 4]. \quad (\text{Ответ: } M = e^4, \quad m = 0).$$

8.4.2. Глобальный экстремум функции на интервале

Пусть промежуток I — это интервал с концами a и b , причем возможно $a = -\infty$, $b = +\infty$.

Правило нахождения экстремальных значений непрерывной на интервале функции.

1. Найти критические точки $x_k \in I$ функции f , если они существуют, и вычислить $f(x_k)$.

2. Вычислить односторонние пределы

$$f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \quad f(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$$

или для бесконечного интервала

$$f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad f(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

3. Из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее. Если эти значения достигаются в критических точках, то существуют $M = \max f(x)$, или $m = \min f(x)$, или и то и другое. Если же эти значения совпадают со значениями $f(a+0)$, $f(b-0)$ или $f(+\infty)$, $f(-\infty)$, то найдены $\sup_I f(x)$, или $\inf_I f(x)$, или и то и другое.

Пример 8.18. Найти глобальные экстремумы функции $f(x) = xe^x$ на промежутке $I = (-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$.

Решение.

1. $f'(x) = (x+1)e^x \Rightarrow x = -1$ — стационарная точка, $f(-1) = -e^{-1}$.

2. $f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$, $f(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.

3. Таким образом, существует $m = \min_{\mathbb{R}} f(x) = -e^{-1}$, а $\sup_{\mathbb{R}} f(x) = +\infty$.

Упражнение 8.6. Найти $\sup f(x)$, $\inf f(x)$ на промежутке I .

1. $f(x) = x^2 e^{-x}$, $I = (0; +\infty)$.

(Ответ: $\sup_I f(x) = \max_I f(x) = 4e^{-2}$, $\inf_I f(x) = 0$).

2. $f(x) = xe^{-x}$, $I = (-1; 2]$.

(Ответ: $\sup_I f(x) = \max_I f(x) = e^{-1}$, $\inf_I f(x) = -e$).

3. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$, $I = (-\infty; -1]$.

(Ответ: $\sup_I f(x) = \max_I f(x) = -4$, $\inf_I f(x) = -\infty$).

$$4. f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x, \quad I = (-1; 2].$$

$$(\text{Ответ: } \sup_I f(x) = \max_I f(x) = 5, \quad \inf_I f(x) = \min_I f(x) = 0).$$

$$5. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}, \quad I = (0; 1).$$

$$(\text{Ответ: } \sup_I f(x) = \max_I f(x) = \frac{\pi}{4}, \quad \inf_I f(x) = 0).$$

8.5. ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Функция f называется *выпуклой* на промежутке I , если

$$f(x_2 + \tau(x_1 - x_2)) \leq f(x_2) + \tau(f(x_1) - f(x_2)), \quad \forall x_1, x_2 \in I, \quad \forall \tau \in (0; 1),$$

и *строго выпуклой*, если

$$f(x_2 + \tau(x_1 - x_2)) < f(x_2) + \tau(f(x_1) - f(x_2)),$$

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_2 \neq x_1, \quad \forall \tau \in (0; 1).$$

Последнее соотношение означает, что дуга $\widehat{M_1 M_2}$ (без концов) графика f расположена под хордой $[M_1 M_2]$, где $M_1(x_1; f(x_1))$, $M_2(x_2; f(x_2))$ произвольные точки графика функции f .

Функция f называется *вогнутой* на промежутке I , если $-f$ — выпуклая функция на I (например, графики на рис. 7, см. с. 72).

Свойства выпуклых функций

1. Выпуклая (вогнутая) функция непрерывна в любой внутренней точке промежутка I и имеет в этой точке конечные односторонние производные.

2. Если функция f строго выпукла (строго вогнута) на I и дифференцируема во внутренней точке промежутка I , то на I все точки графика Γ_f функции f , кроме самой точки касания, лежат строго над касательной (под касательной).

3. Строго выпуклая на I функция f имеет не более одного локального минимума и ни одного локального максимума, строго вогнутая — наоборот: не более одного локального максимума и ни одного локального минимума.

Критерий выпуклости (вогнутости) дифференцируемой функции. Пусть функция f дифференцируема на I . Для строгой выпуклости (строгой вогнутости) необходимо и достаточно, чтобы f' строго возрастала (строго убывала).

Теорема. Если функция f дважды дифференцируема внутри промежутка I , $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) для любой внутренней точки x и отсутствуют промежутки, где $f''(x) = 0$, то функция f строго выпукла (строго вогнута) на промежутке I .

Точка $(x_0; f(x_0))$ называется *точкой перегиба* графика Γ_f функции f , если $\exists \delta > 0$ такое, что на одном из промежутков $(x_0 - \delta; x_0)$, $(x_0; x_0 + \delta)$ она выпукла, а на втором вогнута.

Иногда *точкой перегиба* называют абсциссу x_0 точки $(x_0; f(x_0))$.

Если точка x_0 является точкой перегиба, то на промежутке $(x_0 - \delta; x_0)$ график Γ_f функции f лежит по одну сторону от касательной, а на промежутке $(x_0; x_0 + \delta)$ по противоположную сторону.

Для дифференцируемой функции f точка перегиба это точка экстремума для f' .

Необходимое условие точки перегиба графика Γ_f функции f : либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует.

Точка x_0 , в которой $f''(x_0) = 0$, называется *точкой распрямления* графика Γ_f функции f .

Достаточные условия наличия точки перегиба графика Γ_f функции f :

- 1) если $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то x_0 точка перегиба;
- 2) если $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 точка перегиба;
- 3) если $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(2n)}(x_0) = 0$, а $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$, то x_0 точка перегиба.

Пример 8.19. Найти точки перегиба графика функции

$$f(x) = x + \sin x.$$

Решение. Поскольку $f' = 1 + \cos x$, $f'' = -\sin x$ и $f'' = 0$ при $x_k = k\pi$, а $f'''(k\pi) = -\cos k\pi \neq 0$, то точки с координатами $(k\pi; k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, будут точками перегиба графика функции.

Пример 8.20. Найти точки перегиба графика функции $f(x) = x^{1/3}$. Указать промежутки выпуклости, вогнутости.

Решение. Поскольку $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$ и $f'_+(0) = f'_-(0) = +\infty$, то функция f недифференцируема в точке $x_0 = 0$.

Для всех $x \neq 0$ вычислим $f''(x) = -\frac{2}{9x^{5/3}}$. Так как $f''(x) > 0$ $\forall x < 0$ и $f''(x) < 0$ $\forall x > 0$, то точка $(0; 0)$ — точка перегиба.

Следовательно, на промежутке $(-\infty; 0)$ функция строго выпукла, а на промежутке $(0; +\infty)$ строго вогнута.

Упражнение 8.7. Найти точки перегиба графика функции f . Указать промежутки выпуклости, вогнутости.

1. $f(x) = 3x^2 - x^3$. (Ответ: $(1; 2)$; на $(1; +\infty)$ выпукла,
на $(-\infty; 1)$ вогнута).

2. $f(x) = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$, $a > 0$. (Ответ: $\left(\pm \frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{3a}{4}\right)$;
на $\left(-\infty; -\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ выпукла,
на $\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ вогнута).

3. $f(x) = x + x^{5/3}$. (Ответ: $(0; 0)$; на $(0; +\infty)$ выпукла,
на $(-\infty; 0)$ вогнута).

4. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$. (Ответ: выпукла на $\mathbb{R}$).

5. $f(x) = e^{-1/x^2}$. (Ответ: $\left(\pm \sqrt{\frac{2}{3}}; e^{-3/2}\right)$;
на $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; 0\right)$ и $\left(0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ выпукла,

на $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ и $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right)$ вогнута).

6. $f(x) = \ln(1+x^2)$.

(Ответ: $(\pm 1; \ln 2)$; на $(-1; 1)$ выпукла,
на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ вогнута).

8.6. АСИМПТОТЫ ФУНКЦИИ

Если в точке x_0 функция f имеет разрыв, причем хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ равен бесконечности, то $x = x_0$ — *вертикальная асимптота* графика Γ_f .

Отметим, что в этом случае вертикальная асимптота Γ_f это либо прямая $x = x_0$, либо ее часть.

Пример 8.21. Найти вертикальные асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Решение. Рассмотрим $x = 0$. Поскольку $f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty$, а $f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$, то прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота Γ_f .

Пример 8.22. Найти вертикальные асимптоты графика функции

$$f(x) = e^{1/x}.$$

Решение. Рассмотрим точку $x = 0$:

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} e^{1/x} = \left[\frac{1}{x} \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow +0 \right] = +\infty,$$

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} e^{1/x} = \left[\frac{1}{x} \rightarrow -\infty \text{ при } x \rightarrow -0 \right] = 0.$$

Отсюда следует, что вертикальной асимптотой графика функции f является луч $x = 0$, $y > 0$.

Пример 8.23. Найти вертикальные асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}.$$

Решение. Рассмотрим точку $x = 3$. Поскольку

$$f(3 \pm 0) = \lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty,$$

то луч $x = 3, y > 0$ — вертикальная асимптота графика функции.

Если существуют постоянные $k, b \in \mathbb{R}$ такие, что $f(x) = kx + b + o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$, то луч $y = kx + b$ при $k \neq 0$ называется *правосторонней наклонной асимптотой* графика Γ_f функции f . При этом

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

Если $k = 0$ при $x \rightarrow +\infty$, т.е. $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, то луч $y = b$ — *правосторонняя горизонтальная асимптота*.

Если $f(x) = kx + b + o(1)$ при $x \rightarrow -\infty$, то луч $y = kx + b$ при $k \neq 0$ называется *левосторонней наклонной асимптотой* графика Γ_f функции f , где

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx).$$

Если $k = 0$ при $x \rightarrow -\infty$, т.е. $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, то луч $y = b$ — *левосторонняя горизонтальная асимптота*.

График Γ_f функции f может иметь *двустороннюю наклонную (горизонтальную) асимптоту* $y = kx + b$, при этом

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

Пример 8.24. Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}.$$

Решение. Поскольку

$$\begin{aligned} f(-1+0) &= \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \left[\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3x + 1) = -1 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} = -\infty, \end{aligned}$$

$$f(-1-0) = \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} = +\infty,$$

то прямая $x = -1$ — вертикальная асимптота графика функции.

Так как $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, то найдем наклонные асимптоты:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x(x + 1)} = 1, \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1 - x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x + 1} = 2. \end{aligned}$$

Следовательно, $y = x + 2$ — двусторонняя наклонная асимптота.

Пример 8.25. Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = x^5 e^{-x}.$$

Решение. Поскольку нет конечных значений x , при которых $f(x)$ стремится к бесконечности, то вертикальных асимптот нет.

Найдем наклонные асимптоты:

1) так как

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{e^x} = \left[\left(\frac{\infty}{\infty} \right), \text{ правило Лопиталья} \right] = 0,$$

то $y = 0$ — правосторонняя горизонтальная асимптота;

2) так как

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 e^{-x} = +\infty,$$

то левосторонняя асимптота отсутствует.

Пример 8.26. Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Решение. Поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то вертикальных асимптот нет. А так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, то $y = 0$ — двусторонняя горизонтальная асимптота.

Упражнение 8.8. Найти асимптоты графика функции.

1. $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-3}$. (Ответ: $x = 3$ — вертикальная,
 $y = x + 5$ — двусторонняя наклонная).

2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$. (Ответ: отсутствуют).

3. $f(x) = xe^{-x}$.
(Ответ: $y = 0$ — правосторонняя горизонтальная).

4. $f(x) = x + \frac{1}{x}$. (Ответ: $x = 0$ — вертикальная,
 $y = x$ — двусторонняя наклонная).

5. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$. (Ответ: $x = -1$, $y > 0$ — вертикальная,
 $y = 1$ — двусторонняя горизонтальная).

8.7. ПОСТРОЕНИЕ СХЕМЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Один из вариантов построения схемы графика $y = f(x)$ состоит из следующих пунктов.

1. Определяют множество задания функции. Выделяют участки непрерывности. Исследуют поведение функции в концах промежутков непрерывности. Находят вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

2. Исследуют поведение функции f на $\pm\infty$.

3. Если функция f периодическая, то определяют ее период 2ω , $f(x + 2\omega) = f(x)$, и дальнейшее построение схемы графика проводят на отрезке $[-\omega; \omega]$. Эту схему называют *базисной*. Полная схема может быть получена периодическим продолжением базисной схемы.

4. Если функция f четная: $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in X$ (X симметричное относительно нуля множество), то базисная схема строится для $x \geq 0$, а для периодических функций на отрезке $[0; \omega]$. Для построения полной схемы базисную схему симметрично отражают относительно оси Oy .

Аналогично строится базисная схема для нечетной функции: $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in X$. В этом случае для построения полной схемы базисную схему симметрично отражают относительно начала координат O .

5. Находят производную $f'(x)$, выделяют промежутки монотонности f , находят экстремумы и вычисляют значения f в критических точках.

6. Находят вторую производную $f''(x)$, промежутки выпуклости или вогнутости функции, точки распрямления и вычисляют значения функции в этих точках.

7. Находят точки пересечения графика с осями координат и некоторые дополнительные точки, если есть необходимость.

Все результаты исследований удобно свести в таблицу, в которой отмечают участки единообразного поведения функции и

характерные точки, знаки первой и второй производных и их значения в отдельных точках, схематическое поведение графика Γ_f и значения функции f в отдельных точках.

Пример 8.27. Построить схему графика функции

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

Решение.

1. Множество задания $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Поскольку $f(1 \pm 0) = +\infty$, то луч $x = 1$, $y > 0$ — вертикальная асимптота.

Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0$, то $y = 0$ — двусторонняя горизонтальная асимптота, причем $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -0$.

3. Функция $f(x)$ непериодическая.

4. Так как $f(-x) \neq \pm f(x)$, то $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной функцией.

5. Находим производную

$$f'(x) = \frac{2(x-1)^2 - 2(2x-1)(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1) - 2(2x-1)}{(x-1)^3} = \frac{-2x}{(x-1)^3},$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ — стационарная точка.

Значения $x = 0$ и $x = 1$ разбивают $D(f)$ на три промежутка знакопостоянства производной: $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$.

На промежутке $(-\infty; 0)$ значения $f'(x) < 0 \Rightarrow$ функция f убывает; на промежутке $(0; 1)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow$ функция f возрастает; на промежутке $(1; +\infty)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow$ функция f убывает. Следовательно, $x = 0$ — точка локального минимума, $f(0) = -1$.

6. Вторая производная

$$f''(x) = -2 \frac{(x-1)^3 - x \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = 2 \frac{2x+1}{(x-1)^4},$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x = -1/2$ — точка распрямления.

На промежутке $(-\infty; -1/2)$ значения $f''(x) < 0 \Rightarrow$ функция вогнута; на промежутке $(-1/2; +\infty)$ $f''(x) > 0 \Rightarrow$ функция выпукла. Следовательно, $(-1/2; -8/9)$ — точка перегиба.

7. Найдем точки пересечения графика с осями координат:

$$Ox: f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2;$$

$$Oy: x = 0 \Rightarrow f(0) = -1.$$

Получим $(1/2; 0)$ и $(0; -1)$ — точки пересечения с осями координат.

Результаты исследования сведем в таблицу:

x	$(-\infty; -1/2)$	$-1/2$	$(-1/2; 0)$	0	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
f'	$-$	$-8/27$	$-$	0	$+$	$-$
f''	$-$	0	$+$	2	$+$	$+$
f	$\cap$	$-8/29$	$\cup$	-1	$\cap$	$\cup$
		точка перегиба		точка локального минимума		

Построим схему графика функции (рис. 40).

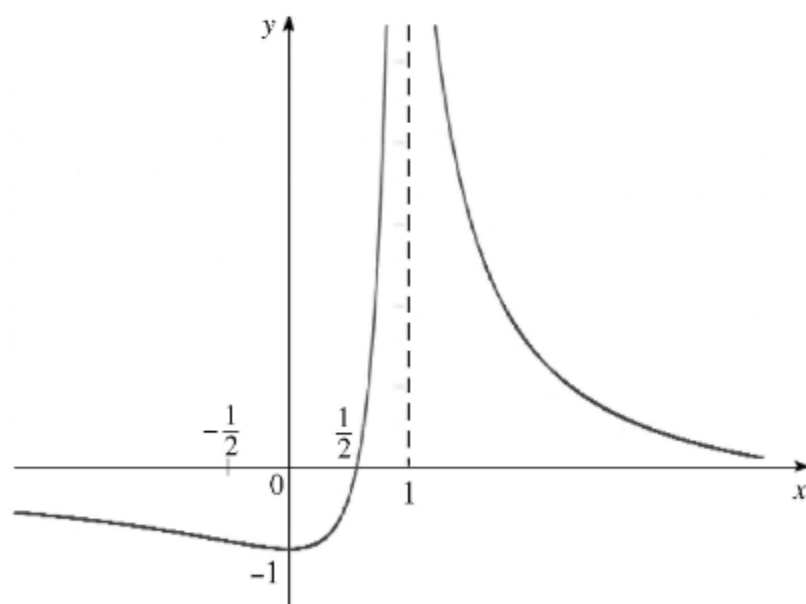


Рис. 40

Пример 8.28. Построить схему графика функции

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-2}.$$

Решение.

1. $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Так как $f(2-0) = -\infty$, $f(2+0) = +\infty$, то $x=2$ — вертикальная асимптота.

2. $f(+\infty) = +\infty$, $f(-\infty) = -\infty$; $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x(x-2)} = 1$,
 $b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+1)^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+1}{x-2} = 4$
 $4 \Rightarrow y = x + 4$ — двусторонняя наклонная асимптота.

$$\begin{aligned} 5. \quad f'(x) &= \frac{2(x+1)(x-2) - (x+1)^2}{(x-2)^2} = \\ &= \frac{(x+1)(2x-4-x-1)}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}, \end{aligned}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 5$ — стационарные точки.

Стационарные точки $x_1 = -1$, $x_2 = 5$ и точка $x = 2$ разбивают множество $D(f)$ на интервалы $(-\infty; -1)$, $(-1; 2)$, $(2; 5)$, $(5; +\infty)$.

На промежутке $(-\infty; -1)$ производная $f'(x) > 0$, так как $f'(2) > 0 \Rightarrow$ функция возрастает; на промежутке $(-1; 2)$ $f'(x) < 0$, так как $f'(0) < 0 \Rightarrow$ функция убывает; на промежутке $(2; 5)$ $f'(x) < 0$, так как $f'(3) < 0 \Rightarrow$ функция убывает; на промежутке $(5; +\infty)$ $f'(x) > 0$, так как $f'(6) > 0 \Rightarrow$ функция возрастает.

Следовательно, $x = -1$ — точка локального максимума, $f(-1) = 0$; $x = 5$ — точка локального минимума, $f(5) = 12$.

$$\begin{aligned} 6. \quad f''(x) &= \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2-4x-5)2(x-2)}{(x-2)^4} = \\ &= \frac{2(x-2)^2 - 2(x^2-4x-5)}{(x-2)^3} = \frac{18}{(x-2)^3}. \end{aligned}$$

Поскольку $f''(x) \neq 0$, то точек перегиба нет. На промежутке $(-\infty; 2)$ вторая производная $f''(x) < 0 \Rightarrow$ функция вогнута, на промежутке $(2; +\infty)$ $f''(x) > 0 \Rightarrow$ функция выпукла.

7. $f(x) = 0 \Rightarrow x = -1$, $x = 0 \Rightarrow f(0) = -1/2 \Rightarrow (-1; 0)$ и $(0; -1/2)$ — точки пересечения с осями координат. На промежутке $(-\infty; 2)$ функция отрицательна, на промежутке $(2; +\infty)$ положительна.

Результаты исследования сведем в таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 2)$	$(2; 5)$	5	$(5; +\infty)$
f'	+	0	—	—	0	+
f''	—	—	—	+	+	+
f	$\cap$	0	$\cap$	$\cup$	12	$\cup$
точка локального минимума			точка локального максимума			

Построим схему графика функции (рис. 41).

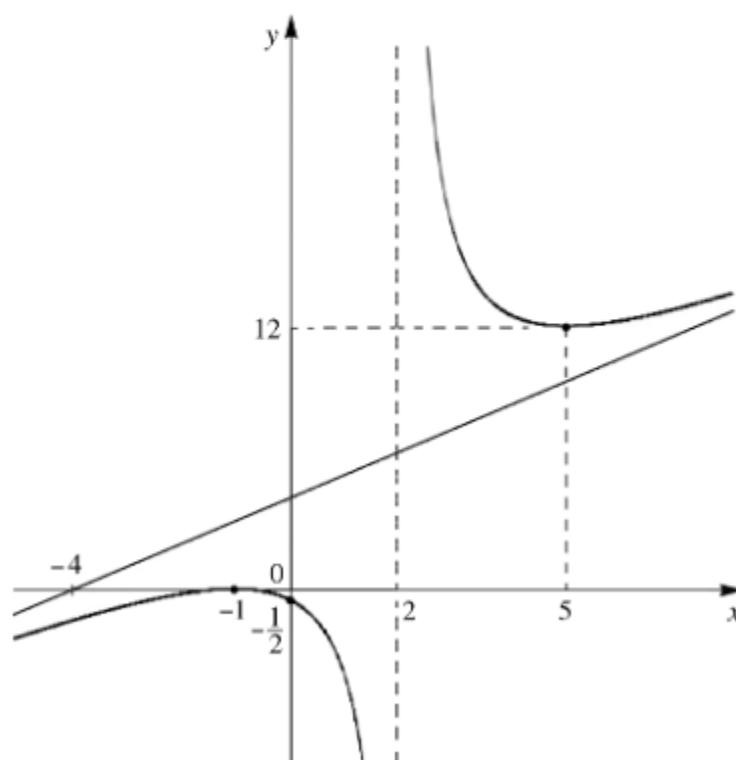


Рис. 41

Пример 8.29. Построить схему графика функции

$$f(x) = 3x - x^3.$$

Решение.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, функция непрерывна.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - x^3) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - x^3}{x} = -\infty.$$

4. Поскольку $f(-x) = -f(x)$, то функция нечетная. Исследования проведем на промежутке $[0; +\infty)$.

$$5. \quad f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2) = 3(1 - x)(1 + x),$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ — стационарная точка.

Точка $x = 1$ разбивает множество $[0; +\infty)$ на два промежутка знакопостоянства производной: $[0; 1)$ и $(1; +\infty)$.

На промежутке $[0; 1)$ производная $f'(x) > 0 \Rightarrow$ функция возрастает, на промежутке $(1; +\infty)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow$ функция убывает. Следовательно, $x = 1$ — точка локального максимума, $f(1) = 2$.

6. $f''(x) = -6x$, $f''(x) = 0$ при $x = 0$.

На промежутке $(0; +\infty)$ вторая производная $f''(x) < 0 \Rightarrow \Rightarrow$ функция вогнута; $(0; 0)$ — точка перегиба.

7. $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = \sqrt{3} \Rightarrow (0; 0)$ и $(\sqrt{3}; 0)$ — точки пересечения с осями координат. На промежутке $(0; \sqrt{3})$ функция положительна, на промежутке $(\sqrt{3}; +\infty)$ отрицательна.

Результаты исследования сведем в таблицу:

x	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
f'	3	+	0	—
f''	0	—	—6	—
f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$
точка локального максимума				

Построим схему графика функции, учитывая ее нечетность (рис. 42).

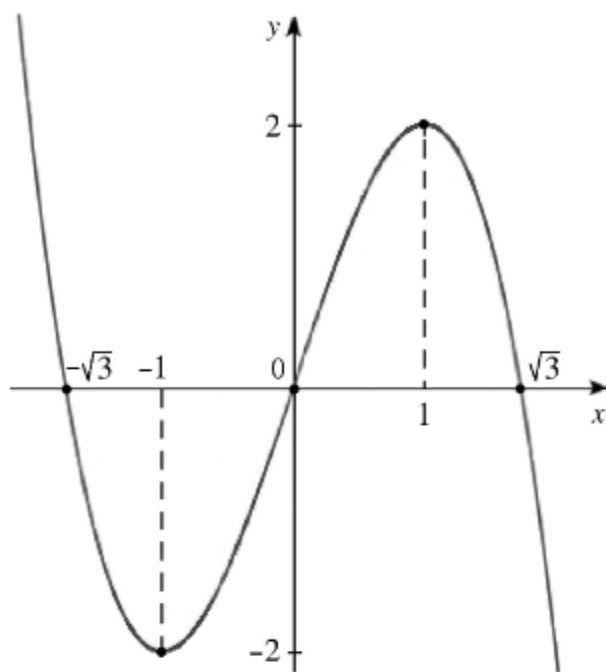


Рис. 42

Пример 8.30. Построить схему графика функции

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

Решение.

1. $D(f): \left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow 2|x| \leq 1+x^2 \Leftrightarrow (1-|x|)^2 \geq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$, функция непрерывна.

2. Поскольку $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, то $y = 0$ — горизонтальная асимптота.

4. Функция нечетная, так как $f(-x) = -f(x)$. Исследование проведем на промежутке $[0; +\infty)$.

$$\begin{aligned} 5. \quad f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|} = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & 0 \leq x < 1, \\ -\frac{2}{1+x^2}, & x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Посчитаем $f'_+(1)$ и $f'_-(1)$:

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \arcsin 1}{x - 1} = \\ &= \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{ правило Лопиталя} \right] = \lim_{x \rightarrow 1+0} \left(-\frac{2}{1+x^2} \right) = -1, \\ f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \frac{\pi}{2}}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2}{1+x^2} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, функция f недифференцируема в точке $x = 1$, $x = 1$ — критическая точка.

Поскольку $f'_+(1) = -1$, $f'_-(1) = 1$, то полукасательные к Γ_f в точке $(1; \pi/2)$ перпендикулярны.

Стационарных точек нет.

Критическая точка $x = 1$ разбивает множество $[0; +\infty)$ на два промежутка: $[0; 1)$ и $(1; +\infty)$.

На промежутке $[0; 1)$ производная $f'(x) > 0 \Rightarrow$ функция возрастает, на промежутке $(1; +\infty)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow$ функция убывает. Следовательно, $x = 1$ — точка локального строгого максимума, $f(1) = \pi/2$.

$$6. \quad f''(x) = \begin{cases} -\frac{4x}{(1+x^2)^2}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & x > 1. \end{cases}$$

На промежутке $[0; 1)$ вторая производная $f''(x) < 0 \Rightarrow$ функция вогнута, на промежутке $(1; +\infty)$ $f''(x) > 0 \Rightarrow$ функция выпукла.

7. График пересекает оси координат в точке $(0; 0)$.

На промежутке $(0; +\infty)$ функция положительна. Поскольку

$$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{x},$$

то для достаточно больших x график функции асимптотически близок к графику функции $g(x) = 2/x$.

Результаты исследования сведем в таблицу:

x	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
f'	2	+	$\cancel{+}$	-
f''	0	-	$\cancel{0}$	+
f	0	$\nearrow$	$\pi/2$	$\searrow$

Построим схему графика функции, учитывая ее нечетность (рис. 43).

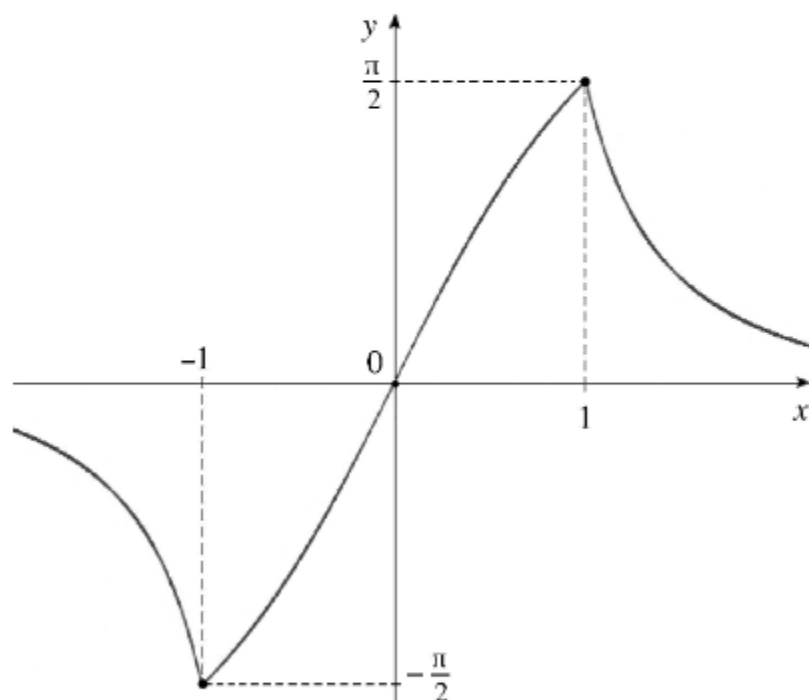


Рис. 43

Пример 8.31. Построить схему графика функции

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}.$$

Решение.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, функция непрерывна.

2. Так как

$$\begin{aligned} x^{2/3} - (x^2 + 1)^{1/3} &= x^{2/3} - x^{2/3} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1/3} = x^{2/3} - x^{2/3} \left(1 + \frac{1}{3x^2} + \right. \\ &\left. + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x^{2/3} \left(1 - 1 - \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\frac{1}{3x^{4/3}} + o\left(\frac{1}{x^{4/3}}\right), \end{aligned}$$

то $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Следовательно, $y = 0$ — горизонтальная асимптота.

4. Функция четная, ибо $f(-x) = f(x)$. Исследование проведем на промежутке $[0; +\infty)$.

$$\begin{aligned} 5. \quad f'(x) &= \frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{-2/3} \cdot 2x = \frac{2}{3} \frac{(x^2 + 1)^{2/3} - x^{4/3}}{x^{1/3}(x^2 + 1)^{2/3}} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &> 0 \quad \forall x \in (0; +\infty) \quad (\text{так как } (x^2 + 1)^{2/3} > (x^2)^{2/3}) \Rightarrow \\ &\text{функция возрастает, } f(0) = -1. \end{aligned}$$

Стационарных точек нет.

Поскольку $f'_+(0) = +\infty$, то точка $(0; 1)$ — точка острия графика Γ_f .

$$\begin{aligned} 6. \quad f''(x) &= (f'(x))' = \left(\frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{2}{3}x(x+1)^{-2/3}\right)' = \\ &= -\frac{2}{9}x^{-4/3} - \frac{2}{3}(x^2+1)^{-2/3} + \frac{8}{9}x^2(x^2+1)^{-5/3} = \\ &= -\frac{2}{9}x^{-4/3}(x^2+1)^{-5/3}((x^2+1)^{5/3} + 3x^{4/3}(x^2+1) - 4x^{4/3} \cdot x^2) = \\ &= -\frac{2}{9}x^{-4/3}(x^2+1)^{-5/3}((x^2+1)^{5/3} - (x^2)^{5/3} + 3x^{4/3}) < 0 \end{aligned}$$

(так как $\forall x \in (0; +\infty) \quad (x^2+1)^{5/3} > (x^2)^{5/3}$) $\Rightarrow$ функция вогнута на $[0; +\infty)$.

Точек перегиба нет.

7. $f(x) < 0 \quad \forall x \in [0; +\infty)$.

Результаты исследования сведем в таблицу:

x	0	$(0; +\infty)$
f'	$\neq$	+
f''	$\neq$	-
f	-1	$\cap$

Построим схему графика функции, учитывая ее четность (рис. 44).

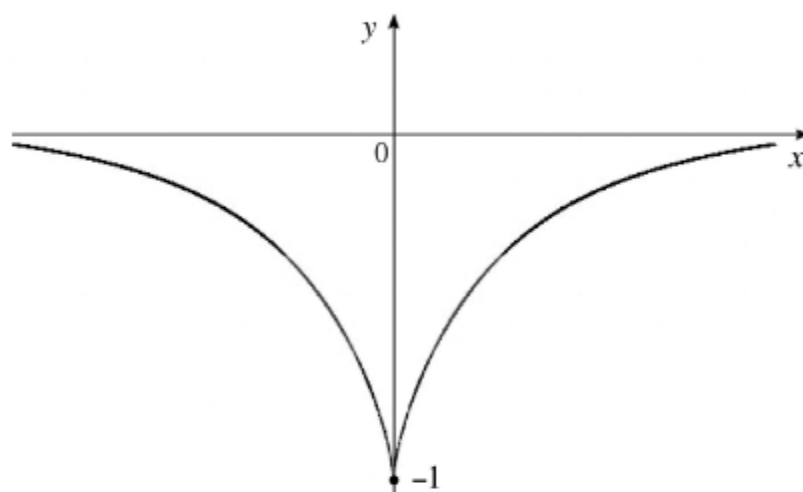


Рис. 44

Пример 8.32. Построить схему графика функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}.$$

Решение.

1. $D(f) = \mathbb{R}$, функция непрерывна.
2. Асимптоты отсутствуют.
3. Функция периодическая, период равен 2π . Исследование можно провести сначала на промежутке $[-\pi; \pi]$.
4. Функция нечетная: $f(-x) = -f(x)$, поэтому достаточно ограничиться промежутком $[0; \pi]$.

$$5. \quad f'(x) = \frac{\cos x(2 + \cos x) - \sin x(-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{1 + 2 \cos x}{(2 + \cos x)^2},$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + 2 \cos x = 0 \Rightarrow x_1 = 2\pi/3$ — единственная стационарная точка на $(0; \pi)$. Она разбивает отрезок $[0; \pi]$ на два промежутка знакопостоянства производной: $(0; 2\pi/3)$ и $(2\pi/3; \pi)$.

На промежутке $(0; 2\pi/3)$ производная $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает, на промежутке $(2\pi/3; \pi)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ убывает. Следовательно, $x = 2\pi/3$ — точка локального максимума, $f(2\pi/3) = \sqrt{3}/3 \approx 0,58$.

$$\begin{aligned} 6. f''(x) &= \frac{-2\sin x(2+\cos x)^2 - (1+\cos x) \cdot 2(2+\cos x)(-\sin x)}{(2+\cos x)^4} = \\ &= \frac{-2\sin x(2+\cos x) + 2\sin x(1+2\cos x)}{(2+\cos x)^3} = \frac{2\sin x(\cos x - 1)}{(2+\cos x)^3} \Rightarrow \\ \Rightarrow f''(x) &< 0 \text{ на промежутке } (0; \pi) \Rightarrow \text{функция вогнута.} \end{aligned}$$

7. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Rightarrow$ точки $(0; 0)$, $(\pi; 0)$ — точки пересечения графика с осями координат.

Результаты исследования сведем в таблицу:

x	0	$(0; 2\pi/3)$	$2\pi/3$	$(2\pi/3; \pi)$	π
f'	1/9	+	0	—	-1
f''	0	—	—	—	0
f	0	$\curvearrowright$	$\sqrt{3}/3$	$\curvearrowleft$	0
			точка локального максимума		

Учитывая нечетность и периодичность функции $f(x)$, можно заметить, что точки $(0; 0)$ и $(\pi; 0)$ будут точками перегиба.

Построим схему графика функции, учитывая ее нечетность и периодичность (рис. 45).

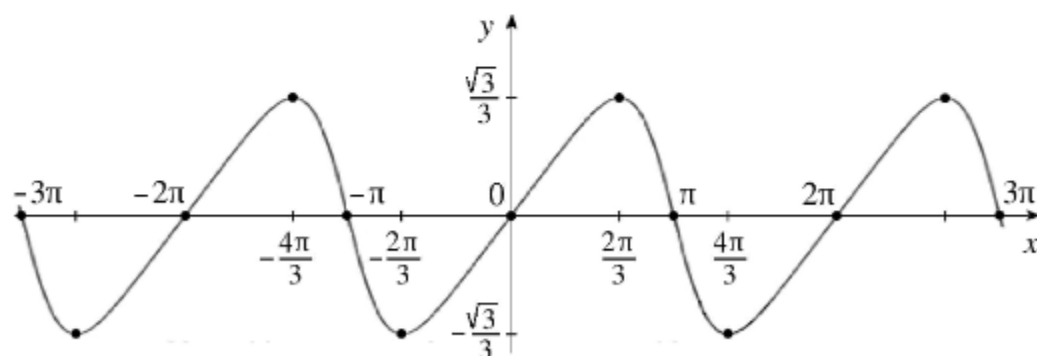


Рис. 45

*Задачи для индивидуальных
и контрольных заданий*

8.1. Найти локальные экстремумы, промежутки возрастания и убывания функции.

1. $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)^3$.

(Ответ: $x = \frac{4}{5}$ — точка локального максимума, $f\left(\frac{4}{5}\right) \approx 8,4$;
 $x = 2$ — точка локального минимума, $f(2) = 0$; на $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right)$ и $(2; +\infty)$ возрастает, на $\left(\frac{4}{5}; 2\right)$ убывает).

2. $f(x) = \frac{3x^2}{4 - x^2}$.

(Ответ: $x = 0$ — точка локального минимума, $f(0) = 0$; на $(0; 2)$ и $(2; +\infty)$ возрастает, на $(-\infty; -2)$ и $(-2; 0)$ убывает).

3. $f(x) = 4x^2 + x$.

(Ответ: $x = -\frac{1}{8}$ — точка локального минимума, $f\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{16}$; на $\left(-\frac{1}{8}; +\infty\right)$ возрастает, на $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right)$ убывает).

4. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x + 50}$.

(Ответ: $x = 25$ — точка локального максимума, $f(25) = \frac{\sqrt[3]{25}}{75}$; на $(-\infty; -50)$ и $(-50; 25)$ возрастает, на $(25; +\infty)$ убывает).

5. $f(x) = x^2 - 10 \ln x$.

(Ответ: $x = \sqrt{5}$ — точка локального минимума, $f(\sqrt{5}) = 25 - 5 \ln 5$; на $(\sqrt{5}; +\infty)$ возрастает, на $(0; \sqrt{5})$ убывает).

6. $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

(Ответ: $x = 0$ — точка локального минимума, $f(0) = 0$;
 $x = \pm 1$ — точки локального максимума, $f(\pm 1) = e^{-1}$; на
 $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$ возрастает, на $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$ убывает).

7. $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x-1)^2}$.

(Ответ: $x = -1$ — точка локального максимума, $f(-1) = \frac{1}{4}$;
 $x = 0, x = 4$ — точки локального минимума, $f(0) = 0$,
 $f(4) = \frac{32}{3}$; на $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$ и $(4; +\infty)$ возрастает, на
 $(-1; 0)$ и $(1; 4)$ убывает).

8. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$.

(Ответ: $x = 0$ — точка локального минимума, $f(0) = 0$;
 $x = \frac{8}{27}$ — точка локального максимума, $f\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{4}{27}$; на
 $\left(0; \frac{8}{27}\right)$ возрастает, на $(-\infty; 0)$ и $\left(\frac{8}{27}; +\infty\right)$ убывает).

9. $f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln x$. (Ответ: на $(0; +\infty)$ убывает).

10. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$.

(Ответ: $x = 1$ — точка локального минимума, $f(1) = 4$; на
 $(-\infty; 1)$ убывает, на $(1; +\infty)$ возрастает).

11. $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + 3$.

(Ответ: $x = 1$ — точка локального минимума, $f(1) = \frac{3}{4}$;
 $x = 2$ — точка локального максимума, $f(2) = 1$; $x = 3$
точка локального минимума, $f(3) = \frac{3}{4}$; на $(-\infty; 1)$ и $(2; 3)$
убывает, на $(1; 2)$ и $(3; +\infty)$ возрастает).

$$12. f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

(Ответ: $x = -\sqrt{3}$ — точка локального максимума, $f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$; $x = \sqrt{3}$ — точка локального минимума, $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$; на $(-\infty; -\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}; +\infty)$ возрастает, на $(-\sqrt{3}; -1)$, $(-1; 1)$ и $(1; \sqrt{3})$ убывает).

8.2. Найти глобальные экстремумы

$$M = \max_{[a, b]} f(x), \quad m = \min_{[a, b]} f(x).$$

$$1. f(x) = (x - 2)^2(x + 1)^3, \quad [0; 3]. \quad (\text{Ответ: } M = 64, \quad m = 0).$$

$$2. f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \quad [-2; 2].$$

(Ответ: $M = 2, \quad m = -151$).

$$3. f(x) = (x - 3)^3 e^{|x+1|}, \quad [-2; 4].$$

(Ответ: $M = e^5, \quad m = -125e$).

$$4. f(x) = |x^2 - 3x + 2|, \quad [-10; 10]. \quad (\text{Ответ: } M = 132, \quad m = 0).$$

$$5. f(x) = |x|e^{-|x-1|}, \quad [-2; 2]. \quad (\text{Ответ: } M = 1, \quad m = 2e^{-3}).$$

$$6. f(x) = \sqrt{5 - 4x}, \quad [-1; 1]. \quad (\text{Ответ: } M = 3, \quad m = 1).$$

$$7. f(x) = x \ln \frac{x}{5}, \quad [1; 5]. \quad (\text{Ответ: } M = 0, \quad m = -5e^{-1}).$$

$$8. f(x) = 2 \sin x + 2 \sin 2x, \quad \left[0; \frac{3\pi}{2}\right].$$

(Ответ: $M = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad m = -2$).

$$9. f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \quad [-1; 2].$$

(Ответ: $M = 2, \quad m = -10$).

$$10. f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{3} \cos^2 x - \cos x, \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$(\text{Ответ: } M = \frac{\pi}{4}, \quad m = -\frac{\pi}{4}).$$

$$11. f(x) = \frac{x}{1 + \ln^2 x}, \quad [e^{-2}; e^2]. \quad (\text{Ответ: } M = \frac{1}{5}e^2, \quad m = \frac{1}{5}e^{-2}).$$

$$12. f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 6, \quad [-3; 2].$$

$$(\text{Ответ: } M = 50, \quad m = -62).$$

$$13. f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 9x^2 + 48x, \quad [0; 9]. \quad (\text{Ответ: } M = 80, \quad m = 0).$$

$$14. f(x) = x + \frac{4}{(x+2)^2}, \quad [-1; 5]. \quad (\text{Ответ: } M = \frac{249}{49}, \quad m = 1).$$

8.3. Найти $\sup f(x)$, $\inf f(x)$ на промежутке I .

$$1. f(x) = \left(1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}, \quad I = (0; +\infty).$$

$$(\text{Ответ: } \sup_I f(x) = 1, \quad \inf_I f(x) = 0).$$

$$2. f(x) = x^3 e^x, \quad I = (-\infty; 1).$$

$$(\text{Ответ: } \sup_I f(x) = e, \quad \inf_I f(x) = \min_I f(x) = -27e^{-3}).$$

$$3. f(x) = x^2 e^{-x}, \quad I = (-5; 5).$$

$$(\text{Ответ: } \sup_I f(x) = 25e^5, \quad \inf_I f(x) = \min_I f(x) = 0).$$

$$4. f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}, \quad I = (-1; 1/2).$$

$$(\text{Ответ: } \sup_I f(x) = \sqrt[3]{2}, \quad \inf_I f(x) = -\frac{\sqrt[3]{11}}{2}).$$

$$5. f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}, \quad I = [1/2; 6].$$

$$(\text{Ответ: } \sup_I f(x) = \max_I f(x) = \frac{2}{27}, \quad \inf_I f(x) = \min_I f(x) = 0).$$

$$6. f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}, \quad I = (3/2; +\infty).$$

$$(\text{Ответ: } \sup_I f(x) = \max_I f(x) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \inf_I f(x) = -\infty).$$

$$7. f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2, \quad I = (-1; 1).$$

$$(\text{Ответ: } \sup_I f(x) = 2, \quad \inf_I f(x) = -12).$$

$$8. f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2}{x^2}, & x \in [-2; 2] \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

$$(\text{Ответ: } \sup_I f(x) = +\infty, \quad \inf_I f(x) = \min_I f(x) = \frac{17}{2}).$$

$$9. f(x) = e^{-x^2} \cos x^2, \quad I = \mathbb{R}.$$

$$(\text{Ответ: } \sup_I f(x) = \max_I f(x) = 1,$$

$$\inf_I f(x) = \min_I f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-3\pi/4}).$$

$$10. f(x) = (5-x)2^{-x}, \quad I = (7; +\infty).$$

$$(\text{Ответ: } \sup_I f(x) = 0, \quad \inf_I f(x) = -\frac{1}{64}).$$

$$11. f(x) = 7 + 2x \ln 25 - 5^{x-1} - 5^{2-x}, \quad I = (0; +\infty).$$

$$(\text{Ответ: } \sup_I f(x) = \max_I f(x) = 1 + 8 \ln 5, \quad \inf_I f(x) = -\infty).$$

$$12. f(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}, \quad I = (0; +\infty).$$

$$(\text{Ответ: } \sup_I f(x) = \pi, \quad \inf_I f(x) = 0).$$

$$13. f(x) = \frac{1}{3} x \ln x - \frac{1}{6} \ln 9, \quad I = (1; 3].$$

$$(\text{Ответ: } \sup_I f(x) = \max_I f(x) = 0, \quad \inf_I f(x) = -\frac{1}{3} \ln 3).$$

$$14. f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x-1}}, \quad I = (3/4; 3).$$

$$(\text{Ответ: } \sup_I f(x) = \sqrt[3]{\frac{9}{5}}, \quad \inf_I f(x) = \min_I f(x) = 1).$$

8.4. Найти точки перегиба графика Γ_f функции f . Указать промежутки выпуклости, вогнутости.

$$1. f(x) = (x^2 + 1)e^x.$$

(Ответ: $(-3; 9e^{-3})$, $(-1; 2e^{-1})$; на $(-\infty; -3)$ и $(-1; +\infty)$ выпукла, на $(-3; -1)$ вогнута).

$$2. f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5.$$

(Ответ: $(1; 12)$, $(2; 21)$; на $(-\infty; 1)$ и $(2; +\infty)$ выпукла, на $(1; 2)$ вогнута).

$$3. f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

(Ответ: $(0; 0)$; на $(-\infty; 0)$ выпукла, на $(0; +\infty)$ вогнута).

$$4. f(x) = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4.$$

(Ответ: $(-3; 294)$, $(2; 114)$; на $(-3; 2)$ выпукла, на $(-\infty; -3)$ и $(2; +\infty)$ вогнута).

$$5. f(x) = x^3 e^{-4x}.$$

(Ответ: $(0; 0)$, $\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{4}; \frac{27 - 15\sqrt{3}}{2} e^{\sqrt{3}-3}\right)$,
 $\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{4}; \frac{27 + 15\sqrt{3}}{2} e^{-(\sqrt{3}+3)}\right)$; на $\left(0, \frac{3 - \sqrt{3}}{4}\right)$ и
 $\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{4}; +\infty\right)$ выпукла, на $\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{4}; \frac{3 + \sqrt{3}}{4}\right)$ вогнута).

$$6. f(x) = e^{2x-x^2}.$$

(Ответ: $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \sqrt{e}\right)$, $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}; \sqrt{e}\right)$; на $\left(-\infty; \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$ выпукла, на $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ вогнута).

$$7. f(x) = \frac{18}{x} \ln \frac{x}{18}.$$

(Ответ: $(18e^{3/2}; \frac{3}{2}e^{-3/2})$; на $(18e^{3/2}; +\infty)$ выпукла, на $(0, 18e^{3/2})$ вогнута).

$$8. f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}.$$

(Ответ: $(-1; 0)$, $\left(2 - \sqrt{3}; \frac{3 - \sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(2 + \sqrt{3}; \frac{3 + \sqrt{3}}{4}\right)$; на $(-1; 2 - \sqrt{3})$ и $(2 + \sqrt{3}; +\infty)$ выпукла, на $(-\infty; -1)$ и $(2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$ вогнута).

$$9. f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}.$$

(Ответ: $(1/2; e^{\operatorname{arctg} \frac{1}{2}})$; на $(-\infty; 1/2)$ выпукла, на $(1/2; +\infty)$ вогнута).

$$10. f(x) = (1 + 2x^2)e^x.$$

(Ответ: $\left(\frac{-4 - \sqrt{6}}{2}; (12 + 4\sqrt{6})e^{-\frac{4+\sqrt{6}}{2}}\right)$, $\left(\frac{-4 + \sqrt{6}}{2}; (12 - 4\sqrt{6})e^{\frac{\sqrt{6}-4}{2}}\right)$; на $\left(-\infty; \frac{-4 - \sqrt{6}}{2}\right)$ и $\left(\frac{-4 + \sqrt{6}}{2}; +\infty\right)$ выпукла, на $\left(\frac{-4 - \sqrt{6}}{2}; \frac{-4 + \sqrt{6}}{2}\right)$ вогнута).

$$11. f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2.$$

(Ответ: $(-\sqrt[3]{2}/2; 0)$; на $(-\infty; -\sqrt[3]{2}/2)$ и $(0; +\infty)$ выпукла, на $(-\sqrt[3]{2}/2; 0)$ вогнута).

8.5. Найти асимптоты графика функции f .

1. $f(x) = \frac{3 - 2x}{x + 1}$. (Ответ: $x = -1$ вертикальная,
 $y = -2$ двусторонняя горизонтальная).

2. $f(x) = \frac{x^3}{(x + 1)^2}$. (Ответ: $x = -1, y < 0$ вертикальная,
 $y = x - 2$ двусторонняя наклонная).

3. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$.
(Ответ: $y = x + 1/3$ двусторонняя наклонная).

4. $f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
(Ответ: $y = 1$ правосторонняя горизонтальная,
 $y = -1$ левосторонняя горизонтальная).

5. $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$. (Ответ: $x = 2$ вертикальная,
 $y = x + 2$ двусторонняя наклонная).

6. $f(x) = \frac{x}{(x - 1)^2}$. (Ответ: $x = 1, y > 0$ вертикальная,
 $y = 0$ двусторонняя горизонтальная).

7. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$. (Ответ: $x = -2, x = 2$ вертикальные,
 $y = 0$ двусторонняя горизонтальная).

8. $f(x) = \frac{x^4 + 16}{x^2}$. (Ответ: $x = 0, y > 0$ вертикальная).

8.6. Построить схему графика функции f .

1. $f(x) = \frac{x^3}{(x + 1)^2}$.

(Ответ: $x = -1$, $y = x - 2$ асимптоты; $f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$,

$f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4}$; $x = -3$ точка локального максимума,

$f(-3) = -27/4$; $(0; 0)$ точка перегиба; на $(0; +\infty)$ выпукла, на $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0)$ вогнута).

2. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$.

(Ответ: $y = x + \frac{1}{3}$ асимптота; $f'(x) = \frac{1}{3} \sqrt[3]{(x+1)^{-2}} \times$

$\times \sqrt[3]{x^{-1}}(3x+2)$, $f''(x) = -\frac{2}{9} \sqrt[3]{(x+1)^{-5}x^{-4}}$, $f'_+(0) = +\infty$,

$f'_-(0) = -\infty$, $f'_\pm(-1) = +\infty$; $x = -\frac{2}{3}$ точка локального

максимума, $f(-\frac{2}{3}) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$; $(-1; 0)$ точка перегиба; на

$(-\infty; -1)$ выпукла, на $(-1; 0)$ и $(0; +\infty)$ вогнута).

3. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$.

(Ответ: $y = 1$ асимптота; $f'(x) = \frac{6x}{(x^2 + 2)^2}$, $f''(x) =$

$\frac{6(2-3x^2)}{(x^2+2)^3}$; $x = 0$ точка локального минимума, $f(0) =$

$-\frac{1}{2}$; $(\sqrt{\frac{2}{3}}; -\frac{1}{8})$, $(-\sqrt{\frac{2}{3}}; -\frac{1}{8})$ точки перегиба; на

$(-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}})$ выпукла, на $(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}})$ и $(\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty)$ вогнута).

4. $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.

(Ответ: $x = 2$, $y = x + 2$ асимптоты; $f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$,

$f''(x) = \frac{6}{(x-2)^3}$; $x = 0$ точка локального максимума,

$f(0) = 0$; $x = 4$ точка локального минимума, $f(4) = 8$; на $(2; +\infty)$ выпукла, на $(-\infty; 2)$ вогнута).

5. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$.
 (Ответ: $f'(x) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^{-1}} - 1$, $f''(x) = -\frac{2}{9}\sqrt[3]{x^{-4}}$; $x = 8/27$ точка локального максимума, $f(8/27) = 4/27$; $x = 0$ точка острого локального минимума, $f(0) = 0$; на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ вогнута).
6. $f(x) = xe^{-x^2/4}$.
 (Ответ: $y = 0$ асимптота; $f'(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)e^{-x^2/4}$,
 $f''(x) = \frac{x(x^2-6)}{4}e^{-x^2/4}$; $x = \sqrt{2}$ точка локального максимума, $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}e^{-1/2}$; $x = -\sqrt{2}$ точка локального минимума, $f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}e^{-1/2}$; $(-\sqrt{6}; -\sqrt{6}e^{-3/2})$, $(0; 0)$, $(\sqrt{6}; \sqrt{6}e^{-3/2})$ точки перегиба; на $(-\sqrt{6}; 0)$, $(\sqrt{6}; +\infty)$ выпукла, на $(-\infty; -\sqrt{6})$, $(0; \sqrt{6})$ вогнута).
7. $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.
 (Ответ: $x = 1$, $y > 0$; $x = -1$, $y < 0$ асимптоты;
 $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$, $f''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$; на $(-1; 1)$ функция возрастает; $(0; 0)$ точка перегиба; на $(0; 1)$ выпукла, на $(-1; 0)$ вогнута).
8. $f(x) = (1+x^2)e^{-x^2}$.
 (Ответ: $y = 0$ асимптота; $f'(x) = -2x^3e^{-x^2}$,
 $f''(x) = 2x^2e^{-x^2}(2x^2 - 3)$; $x = 0$ точка локального максимума, $f(0) = 1$; $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{5}{2}e^{-3/2}\right)$ точки перегиба; на $(-\infty; -\sqrt{3/2})$, $(\sqrt{3/2}; +\infty)$ выпукла, на $(-\sqrt{3/2}; \sqrt{3/2})$ вогнута).
9. $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4x + 4}$.
 (Ответ: $x = 2$, $y > 0$ и $y = 1$ асимптоты; $f'(x) = \frac{-8(x+2)}{(x-2)^3}$, $f''(x) = 16\frac{x+4}{(x-2)^4}$; $x = -2$ точка локаль-

- ного минимума, $f(-2) = 0$; $(-4; 1/9)$ — точка перегиба; на $(-4; 2)$ и $(2; +\infty)$ выпукла, на $(-\infty; -4)$ вогнута).
10. $f(x) = e^{-x^2}$.
 (Ответ: $y = 0$ — асимптота; $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$; $x = 0$ — точка локального максимума, $f(0) = 1$; $(-1/\sqrt{2}; e^{-1/2})$ и $(1/\sqrt{2}; e^{-1/2})$ — точки перегиба; на $(-\infty; -1/\sqrt{2})$ и $(1/\sqrt{2}; +\infty)$ выпукла, на $(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$ вогнута).
11. $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$.
 (Ответ: $x = 1$ и $y = x + 3$ — асимптоты; $f'(x) = 1 - \frac{3}{(x-1)^2}$, $f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}$; $x = 1 - \sqrt{3}$ — точка локального максимума, $f(1 - \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3}$; $x = 1 + \sqrt{3}$ — точка локального минимума, $f(1 + \sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3}$; на $(1; +\infty)$ выпукла, на $(-\infty; 1)$ вогнута).
12. $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.
 (Ответ: $f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, $f''(x) = \frac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{3/2}}$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ — точка локального максимума, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ — точка локального минимума, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$; $(0; 0)$ — точка перегиба; на $(-1; 0)$ выпукла, на $(0; 1)$ вогнута).
13. $f(x) = (x+1)\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2$.
 (Ответ: $x = 2$, $y > 0$ и $y = x + 3$ — асимптоты; $f'(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 5x}{(x-2)^3}$, $f''(x) = \frac{14x-10}{(x-2)^4}$; $x = 0$ — точка локального максимума, $f(0) = \frac{1}{4}$; $x = 1$ — точка локального минимума, $f(1) = 0$; $x = 5$ — точка локального миниму-

ма, $f(5) = \frac{32}{3}$; $\left(\frac{5}{17}; \frac{16}{189}\right)$ точка перегиба; на $\left(-\infty; \frac{5}{7}\right)$ вогнута, на $\left(\frac{5}{7}; 2\right)$ и $(2; +\infty)$ выпукла).

14. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2\sqrt{x + 1}$.
 (Ответ: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$, $f''(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}} + \frac{1}{2(x + 1)^{3/2}}$; $x = 1$ точка локального минимума, $f(1) = -\sqrt{2}$; на $(-1; +\infty)$ выпукла).

15. $f(x) = \frac{x^3 + 7x - 3}{x^2}$.
 (Ответ: $x = 0$ и $y = x$ асимптоты; $f'(x) = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3}$, $f''(x) = \frac{14x - 18}{x^4}$; $x = 1$ точка локального максимума, $f(1) = 5$; $x = -3$ точка локального максимума, $f(-3) = -\frac{17}{3}$; $x = 2$ точка локального минимума, $f(2) = \frac{19}{4}$; $\left(\frac{9}{7}; \frac{929}{27}\right)$ точка перегиба; на $(-\infty; 0)$ и $(0; 9/7)$ вогнута, на $(9/7; +\infty)$ выпукла).

16. $f(x) = \frac{e^{-x}}{1 - x}$.
 (Ответ: $x = 1$ и $y = 0$ асимптоты; $f'(x) = \frac{xe^{-x}}{(1 - x)^2}$, $f''(x) = \frac{(1 + x^2)e^{-x}}{(1 - x)^3}$; $x = 0$ точка локального минимума, $f(0) = 1$; на $(-\infty; 1)$ выпукла, на $(1; +\infty)$ вогнута).

17. $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x - 1)^2}$.
 (Ответ: $x = 1$, $y > 0$ и $y = x + 4$ асимптоты; $f'(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x}{(x - 1)^3}$, $f''(x) = \frac{14x + 4}{(x - 1)^4}$; $x = -1$ точка ло-

кального максимума, $f(-1) = \frac{1}{4}$; $x = 0$ точка локального минимума, $f(0) = 0$, $f(-1) = \frac{1}{4}$; $x = 4$ точка локального минимума, $f(4) = \frac{32}{3}$; $\left(-\frac{2}{7}; \frac{16}{189}\right)$ точка перегиба; на $(-2/7; 1)$ и $(1; +\infty)$ выпукла, на $(-\infty; -2/7)$ вогнута).

18. $f(x) = (2x + 3)e^{-2(x+1)}$.

(Ответ: $y = 0$ правосторонняя асимптота; $f'(x) = -4 \times (x+1)e^{-2(x+1)}$, $f''(x) = 4(2x+1)e^{-2(x+1)}$; $x = -1$ точка локального максимума, $f(-1) = 1$; $(-1/2; 2e^{-1})$ точка перегиба; на $(-1/2; +\infty)$ выпукла, на $(-\infty; -1/2)$ вогнута).

19. $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$.

(Ответ: $x = 2$, $y > 0$ и $y = x + 1$ асимптоты; $f'(x) = \frac{(x-1)^2(x-4)}{(x-2)^3}$, $f''(x) = \frac{6(x-1)}{(x-2)^4}$; $x = 4$ точка локального минимума, $f(4) = 27/4$; $(1; 0)$ точка перегиба; на $(1; 2)$ и $(2; +\infty)$ выпукла, на $(-\infty; 1)$ вогнута).

20. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 - 4x^3}$.

(Ответ: $y = x - 1$ правосторонняя асимптота, $y = -x + 1$ левосторонняя асимптота; $f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt[4]{x(x-4)^3}}$, $f''(x) = -\frac{3}{\sqrt[4]{x^5(x-4)^7}}$; на $(-\infty; 0)$ и $(4; +\infty)$ вогнута).

ГЛАВА 9. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

9.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Первообразной для функции $f(x)$ на промежутке $|a; b|$ называется такая функция $F(x)$, что

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in |a; b|.$$

Пример 9.1. Указать первообразную для функции:

а) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in (-\pi/2; \pi/2)$;

б) $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

(Ответ: а) $F(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2; \pi/2)$;

б) $F(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$).

Теорема об общем виде первообразной. Если функция $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$ на промежутке $|a; b|$, то функция $\Phi(x)$ также будет первообразной для $f(x)$ тогда и только тогда, когда $\Phi(x) = F(x) + C$ $\forall x \in |a; b|$, где C постоянная.

Другими словами, выражение $F(x) + C$, где C произвольная постоянная, является общим видом первообразной для функции $f(x)$ на промежутке $|a; b|$.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке $|a; b|$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на промежутке $|a; b|$ и обозначается $\int f(x) dx$.

Если функция $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$, то, согласно теореме об общем виде первообразной, неопределенный интеграл $\int f(x) dx$ равен $F(x) + C$, где C произвольная постоянная, т. е. $\int f(x) dx = F(x) + C$.

Произведение $f(x) dx$ называется *подынтегральным выражением*, функция $f(x)$ *подынтегральной функцией*, x *переменной интегрирования*.

Свойства неопределенного интеграла

1°. Операция дифференцирования обратна операции неопределенного интегрирования:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x), \quad d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx.$$

На этом свойстве основано правило проверки интегрирования дифференцированием.

2°. Операция неопределенного интегрирования обратна операции дифференцирования в том смысле, что

$$\int F'(x) dx = \int dF(x) = F(x) + C.$$

3°. Интеграл обладает свойством линейности:

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

Это равенство понимают так: если $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$, а $G(x)$ первообразная для функции $g(x)$, то

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = aF(x) + bG(x) + C, \quad \text{где } C = aC_1 + bC_2.$$

В частности, из этого свойства вытекает:

3₁) $\int af(x) dx = a \int f(x) dx$, $a \neq 0$, постоянный множитель можно выносить за знак интеграла;

3₂) $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ интеграл от суммы (разности) равен сумме (разности) интегралов.

На свойстве 3° основан прием интегрирования *метод разложения в сумму*.

Пример 9.2. Вычислить $\int \cos^2(x/2) dx$.

Решение.
$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x + C.$$

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int 0 dx = C.$

2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

10. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$

11. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$

$$12. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1.$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1.$$

$$16. \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + C.$$

Приведенные формулы устанавливаются с использованием таблицы производных.

Замечание. Каждая из приведенных формул верна на каждом промежутке, принадлежащем области определения подынтегральной функции.

Отметим, что искусство интегрирования состоит в поиске приемов, приводящих к таблице основных неопределенных интегралов.

Пример 9.3. Используя таблицу неопределенных интегралов и свойство линейности, вычислить следующие интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int (6x^2 - 3x + 5) dx &= 6 \int x^2 dx - 3 \int x dx + 5 \int dx = 6 \frac{x^3}{3} - \\ &- 3 \frac{x^2}{2} + 5x + C = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad \int (2x^2 + 1)^3 dx &= \int (8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1) dx = \\ &= 8 \int x^6 dx + 12 \int x^4 dx + 6 \int x^2 dx + \int dx = \frac{8}{7}x^7 + \frac{12}{5}x^5 + 2x^3 + \\ &+ x + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad \int (1 + \sqrt{x})^4 dx &= \int (1 + 4\sqrt{x} + 6x + 4x\sqrt{x} + x^2) dx = \\ &= \int dx + 4 \int x^{1/2} dx + 6 \int x dx + 4 \int x^{3/2} dx + \int x^2 dx = x + \\ &+ 4 \frac{x^{3/2}}{3/2} + 6 \frac{x^2}{2} + 4 \frac{x^{1+3/2}}{1+3/2} + \frac{x^3}{3} + C = x + \frac{8}{3}x^{3/2} + 3x^2 + \frac{8}{5}x^{5/2} + \\ &+ \frac{1}{3}x^3 + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г)} \quad \int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2} dx &= \int \frac{x^3+x^2-3x-3}{3x^2} dx = \frac{1}{3} \int x dx + \\ &+ \frac{1}{3} \int dx - \int x^{-2} dx - \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{x^{-1}}{-1} - \ln|x| + C = \\ &= \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{x} - \ln|x| + C. \end{aligned}$$

9.2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \forall x \in I.$$

9.2.1. Введение множителя под знак дифференциала

Пусть функцию $g(x)$ с помощью подходящей дифференцируемой функции $u(x)$ можно представить в виде

$$g(x) = f(u(x))u'(x).$$

В этом случае

$$\int g(x) dx = F(u(x)) + C.$$

На практике выполняют следующие действия:

$$\int g(x) dx = \int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(u(x)) + C.$$

Пример 9.4. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int f(ax + b) dx, \quad a \neq 0.$$

Решение. $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b) d(ax + b) =$
 $[u = ax + b] = \frac{1}{a} \int f(u) du = \frac{1}{a} F(u) + C = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$

Отсюда вытекает, например, что при $a \neq 0$ справедливы представления следующих неопределенных интегралов:

$$\int (ax + b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C, \quad \alpha \neq -1;$$

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + C;$$

$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C;$$

$$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C;$$

$$\int e^{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} e^{(ax+b)} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(ax + b)} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}(ax + b) + C.$$

Пример 9.5. Вычислить $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}, \quad a \neq 0.$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int \frac{dx}{a^2+x^2} &= [\text{вынесем в знаменателе } a^2] = \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \left[d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a} dx \right] = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \left[\frac{x}{a} = t \right] = \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Пример 9.6. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= [\text{вынесем из-под корня } a^2] = \\ &= \int \frac{1}{|a|} \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{|a|}\right)^2}} = \left[\frac{dx}{|a|} = d\left(\frac{x}{|a|}\right) \right] = \int \frac{d\left(\frac{x}{|a|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{|a|}\right)^2}} = \\ &= \left[\frac{x}{|a|} = t \right] = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arcsin} t + C = \operatorname{arcsin} \frac{x}{|a|} + C. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{|a|} + C.$$

Пример 9.7. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} &= \int \frac{dx}{|a| \sqrt{1+\left(\frac{x}{|a|}\right)^2}} = \\ &= \int \frac{d\left(\frac{x}{|a|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{|a|}\right)^2}} = \ln \left(\frac{x}{|a|} + \sqrt{\left(\frac{x}{|a|}\right)^2 + 1} \right) + C = \ln \left(\frac{x}{|a|} + \right. \\ &+ \left. \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{|a|} \right) + C = \ln \frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{|a|} + C = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \ln |a| + \\ &+ C = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C_1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C.$$

Дополним таблицу неопределенных интегралов следующими интегралами.

$$19. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C, \quad |x| < |a|.$$

$$20. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$21. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C, \quad a \neq 0.$$

$$22. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, \quad a \neq 0.$$

$$23. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \quad a \neq 0.$$

Упражнение 9.1. Вычислить неопределенные интегралы.

$$1. \int \frac{(x - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$(\text{Ответ: } \Phi(x) = \frac{6}{13}x^{13/6} - \frac{6}{7}x^{7/6} + C).$$

$$2. \int (x - 2e^x) dx.$$

$$(\text{Ответ: } \Phi(x) = \frac{x^2}{2} - 2e^x + C).$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2 + 4}.$$

$$(\text{Ответ: } \Phi(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C).$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}}.$$

$$(\text{Ответ: } \Phi(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C).$$

$$5. \int \cos^2 2x dx.$$

$$(\text{Ответ: } \Phi(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin 4x + C).$$

$$6. \int \frac{1 + \sin^2(4x + 2)}{\sin^2(4x + 2)} dx.$$

$$(\text{Ответ: } \Phi(x) = -\frac{1}{4} \operatorname{ctg}(4x + 2) + x + C).$$

$$7. \int \frac{3^x + 2^x}{6^x} dx.$$

$$(\text{Ответ: } \Phi(x) = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} - \frac{3^{-x}}{\ln 3} + C).$$

$$8. \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$$

$$(\text{Ответ: } \Phi(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C).$$

9.2.2. Внесение функции под знак дифференциала

Пример 9.8. Вычислить $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx &= \left[d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1 + x^2} \right] = \\ &= \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = [t := \operatorname{arctg} x] = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C. \end{aligned}$$

Пример 9.9. Вычислить $\int \operatorname{tg} x dx$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int \operatorname{tg} x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = [d(\cos x) = -\sin x dx] = \\ &= - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = [t := \cos x] = - \int \frac{dt}{t} = -\ln |t| + C = \\ &= -\ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

Пример 9.10. Вычислить $\int x^2 \sqrt[3]{4x^3 + 2} dx$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int x^2 \sqrt[3]{4x^3 + 2} dx &= \left[x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3 \right] = \frac{1}{3} \int (4x^3 + \\ &+ 2)^{1/3} dx^3 = [t := x^3] = \frac{1}{3} \int (4t + 2)^{1/3} dt = \left[\int (ax + b)^\alpha dx = \right. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}; \quad a = 4; \quad \alpha = \frac{1}{3} \Big] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \frac{(4t+2)^{1+1/3}}{1+1/3} + C = \frac{1}{16} (4x^3+2)^{4/3} + C.$$

Пример 9.11. Вычислить $\int x^4 e^{x^5} dx$.

$$\text{Решение. } \int x^4 e^{x^5} dx = \left[x^4 dx = \frac{1}{5} d(x^5) \right] = \frac{1}{5} \int e^{x^5} dx^5 = \\ [t := x^5] = \frac{1}{5} \int e^t dt = \frac{1}{5} e^t + C = \frac{1}{5} e^{x^5} + C.$$

Упражнение 9.2. Вычислить неопределенные интегралы.

$$1. \int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$(\text{Ответ: } \Phi(x) = \frac{1}{3} \arcsin^3 x + C).$$

$$2. \int e^{x^2} x dx.$$

$$(\text{Ответ: } \Phi(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C).$$

$$3. \int \frac{x^3 dx}{x^4 + 5}.$$

$$(\text{Ответ: } \Phi(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 5) + C).$$

$$4. \int \frac{x dx}{x^4 + 4}.$$

$$(\text{Ответ: } \Phi(x) = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + C).$$

$$5. \int e^{\sin x} \cos x dx.$$

$$(\text{Ответ: } \Phi(x) = e^{\sin x} + C).$$

$$6. \int \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$(\text{Ответ: } \Phi(x) = \frac{1}{2} \ln^2(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C).$$

9.2.3. Выделение множителя из-под знака дифференциала

Пусть имеется $\int g(x) dx$. Если функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема и строго монотонна на соответствующем промежутке, а у функции $f(t) = g(\varphi(t))$ известна первообразная $F(t)$, то

$$\int g(x) dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C,$$

где $t = \varphi^{-1}(x)$ — функция, обратная к функции $x = \varphi(t)$.

На практике выполняют следующие действия:

$$\begin{aligned}\int g(x) dx &= \int g(\varphi(t)) d\varphi(t) = \int g(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int f(t) dt = \\ &= F(t) + C = F(\varphi^{-1}(t)) + C.\end{aligned}$$

Пример 9.12. Вычислить $\int \sqrt{1-x^2} dx$, $|x| < 1$.

Решение. $\int \sqrt{1-x^2} dx = \left[x = \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, \quad dx = \cos t dt, \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t \right] = \int \cos t \times$
 $\times \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \left[\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \right] = \frac{1}{2} \int (1+\cos 2t) dt =$
 $\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C = [t = \arcsin x] =$
 $\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} + C.$

Пример 9.13. Вычислить $\int (7x+9)^{10} dx$.

Решение. $\int (7x+9)^{10} dx = \left[t = 7x+9; \quad 7 dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{7} dt \right] = \frac{1}{7} \int t^{10} dt = \frac{1}{77} (7x+9)^{11} + C.$

Пример 9.14. Вычислить $\int \frac{dx}{2 + \sqrt{x}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{2 + \sqrt{x}} = \left[\sqrt{x} = t, \quad x = t^2, \quad t > 0, \quad dx = 2t \, dt \right] = 2 \int \frac{t \, dt}{2 + t} = \left[\text{преобразуем числитель } t = (t + 2) - 2 \text{ и почленно разделим} \right] = 2 \int \frac{(t+2)-2}{t+2} \, dt = 2 \int \left(1 - \frac{2}{t+2} \right) \, dt = 2(t - 2 \ln(2+t)) + C = 2\sqrt{x} - 4 \ln(2 + \sqrt{x}) + C.$

Пример 9.15. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} = \left[t = \sqrt{e^x + 1}, \quad e^x + 1 = t^2, \quad e^x = t^2 - 1, \quad x = \ln(t^2 - 1) \Rightarrow dx = \frac{2t}{t^2 - 1} \, dt \right] = \int \frac{2t}{t(t^2 - 1)} \, dt = 2 \int \frac{dt}{(t^2 - 1)} = \left[\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \right] = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} \right| + C.$

Пример 9.16. Вычислить $\int x^2 \sqrt[3]{4x^3 + 2} \, dx$.

Решение. $\int x^2 \sqrt[3]{4x^3 + 2} \, dx = \left[4x^3 + 2 = t, \quad x^3 = \frac{t-2}{4}, \quad x = \left(\frac{t-2}{4} \right)^{1/3} \Rightarrow dx = \frac{1}{3} \left(\frac{t-2}{4} \right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{4} \, dt, \right.$
 $x^2 = \left(\frac{t-2}{4} \right)^{2/3} \left. \right] = \frac{1}{12} \int \left(\frac{t-2}{4} \right)^{2/3} t^{1/3} \left(\frac{t-2}{4} \right)^{-2/3} \, dt = \frac{1}{12} \int t^{1/3} \, dt = \frac{1}{12} \frac{t^{4/3} \cdot 3}{4} + C = \frac{1}{16} (4x^3 + 2)^{4/3} + C.$

Примечание. Сравни решение примеров 9.10 и 9.16.

Упражнение 9.3. Вычислить неопределенные интегралы.

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}. \quad (\text{Ответ: } \Phi(x) = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} + C).$$

$$2. \int \frac{dx}{1 + e^{3x}}. \quad (\text{Ответ: } \Phi(x) = x - \frac{1}{3} \ln(1 + e^{3x}) + C).$$

$$3. \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx. \quad (\text{Ответ: } \Phi(x) = \operatorname{arctg}^2 \sqrt{x} + C).$$

$$4. \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx. \quad (\text{Ответ: } \Phi(x) = -2 \cos \sqrt{x} + C).$$

$$5. \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{1+x}}. \quad (\text{Ответ: } \Phi(x) = \frac{3}{2}(x+1)^{2/3} - \\ - 3(x+1)^{1/3} + 3 \ln(1 + \sqrt[3]{1+x}) + C).$$

9.2.4. Интегрирование по частям

Пусть для выражения $v(x)u'(x)$ существует первообразная. Тогда формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

На практике выполняют следующие действия. Пусть $f(x) = g(x)h(x)$ и функция $h(x)$ имеет первообразную $H(x)$. Тогда

$$\int f(x) dx = \int g(x)h(x) dx = \left[\begin{array}{l} u = g(x), \quad du = g'(x) dx, \\ dv = h(x) dx, \quad v = H(x) \end{array} \right] = \\ = g(x)H(x) - \int H(x)g'(x) dx,$$

где $H(x)$ — одна из первообразных для функции $h(x)$.

Пример 9.17. Вычислить $\int x \cos x \, dx$.

Решение.
$$\int x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \cos x \, dx, \quad v = \sin x \end{array} \right] =$$
$$x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Пример 9.18. Вычислить $\int \ln x \, dx$, $x > 0$.

Решение.
$$\int \ln x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx, \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right] = x \ln x -$$
$$- \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

Пример 9.19. Вычислить $\int x^2 e^x \, dx$.

Решение.
$$\int x^2 e^x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2, \quad du = 2x \, dx, \\ dv = e^x \, dx, \quad v = e^x \end{array} \right] = x^2 e^x -$$
$$- 2 \int x e^x \, dx = \left[\text{применим еще раз формулу интегрирования по} \right.$$

частям:
$$\int x e^x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = e^x \, dx, \quad v = e^x \end{array} \right] = x e^x - \int e^x \, dx =$$
$$x e^x - e^x + C_1 \Big] = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + C_1) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x +$$
$$+ 2C_1 = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

Замечание. Практика показывает, что большая часть интегралов, берущихся посредством интегрирования по частям, может быть разбита на следующие три группы.

1. Интегралы вида $\int P_n(x) e^{ax} \, dx$, $\int P_n(x) \cos bx \, dx$, $\int P_n(x) \sin bx \, dx$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n , $a, b \in \mathbb{R}$. В этом случае $u(x) = P_n(x)$.

2. Интегралы вида $\int P_n(x) \ln x \, dx$, $\int P_n(x) \arcsin x \, dx$,

$\int P_n(x) \arccos x \, dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arctg} x \, dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arccotg} x \, dx$,
 $\int P_n(x) \operatorname{arctg}^2 x \, dx$ и т.д. В этом случае в качестве $u(x)$ выбирают функцию, стоящую при многочлене $P_n(x)$.

3. Интегралы вида $\int e^{ax} \cos bx \, dx$ и $\int e^{ax} \sin bx \, dx$. В этом случае допускается выбор $u(x) = e^{ax}$ или $u(x) = \cos bx$ и $u(x) = \sin bx$ соответственно.

Пример 9.20. Вычислить $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

Решение. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \\ dv = x \, dx, \quad v = x^2/2 \end{array} \right] =$
 $\frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \left[\text{подынтегральную функцию пред-} \right.$
 $\text{ставим в виде } \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}, \text{ а затем приме-}$
 $\text{ним свойство линейности} \left. \right] = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$
 $\frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$

Пример 9.21. Вычислить $\int (x+1) \operatorname{arccotg} x \, dx$.

Решение.

$$\int (x+1) \operatorname{arccotg} x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arccotg} x, \quad du = -\frac{dx}{1+x^2}, \\ dv = (x+1) \, dx, \quad v = \frac{x^2}{2} + x \end{array} \right] =$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + x \right) \operatorname{arccotg} x + \int \frac{\frac{x^2}{2} + x}{1+x^2} \, dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \operatorname{arccotg} x +$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 2x}{1+x^2} \, dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1) + 2x-1}{1+x^2} \, dx =$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + x \right) \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} 2x dx = d(x^2) \\ x^2 = t \end{array} \right] &= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \\ + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} &= \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ln(1+t) + C = \left(\frac{x^2}{2} + x - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \right) \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C. \end{aligned}$$

Пример 9.22. Вычислить $\int (x^2 + 2x + 3)e^x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 2x + 3)e^x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 + 2x + 3, \quad du = (2x + 2) dx, \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right] = (x^2 + \\ + 2x + 3)e^x - 2 \int (x + 1)e^x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x + 1, \quad du = dx, \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right] = (x^2 + \\ + 2x + 3)e^x - 2 \left((x + 1)e^x - \int e^x dx \right) &= (x^2 + 2x + 3)e^x - 2(x + \\ + 1)e^x + 2e^x + C &= (x^2 + 3)e^x + C. \end{aligned}$$

Пример 9.23. Вычислить $\int \arccos^2 x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \arccos^2 x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \arccos^2 x, \quad du = -\frac{2 \arccos x dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right] = \\ &= x \arccos^2 x + 2 \int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx - I. \end{aligned}$$

Отдельно вычислим

$$\int \frac{2x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} u = \arccos x, \quad du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv = \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = -2\sqrt{1-x^2} \end{array} \right] =$$

$$= -2\sqrt{1-x^2} \arccos x - 2 \int dx = -2\sqrt{1-x^2} \arccos x - 2x + C.$$

Подставив вычисленный интеграл в выражение I , окончательно получим

$$I = x \arccos^2 x - 2\sqrt{1-x^2} \arccos x - 2x + C.$$

Пример 9.24. Вычислить $\int e^{ax} \cos bx \, dx$.

Решение. Для вычисления этого интеграла также применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I &= \int e^{ax} \cos bx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax} \, dx, \\ dv = \cos bx \, dx, \quad v = \frac{1}{b} \sin bx \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx = \left[\text{еще раз приме-} \right. \\ &\text{ним формулу интегрирования по частям, полагая} \left. \right] = \\ &\left[\begin{array}{l} u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax} \, dx, \\ dv = \sin bx \, dx, \quad v = -\frac{1}{b} \cos bx \end{array} \right] = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \\ &- \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I. \end{aligned}$$

В результате получим уравнение относительно I :

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I.$$

Решая это уравнение, найдем

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) I = \left(\frac{1}{b} \sin bx + \frac{a}{b^2} \cos bx\right) e^{ax},$$

откуда $I = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$. Таким образом,

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

Указанные выше три группы неопределенных интегралов не исчерпывают всех без исключения интегралов, берущихся с помощью формулы интегрирования по частям. Например, в интегралах $\int \sin(\ln x) dx$, $\int \cos(\ln x) dx$, $\int \ln x dx$ в качестве $u(x)$ берут всю подынтегральную функцию.

Рассмотрим пример вычисления неопределенного интеграла, который также вычисляется с помощью формулы интегрирования по частям.

Пример 9.25. Вычислить $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\cos^2 x} &= \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad v = \operatorname{tg} x \end{array} \right] = x \operatorname{tg} x + \int \frac{d \cos x}{\cos x} = \\ &= \left[\int \frac{dt}{t} = \ln |t| \right] = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

Замечание. С помощью формулы интегрирования по частям для интеграла $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ получается следующая рекуррентная формула:

$$\begin{aligned} K_n(x) - \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \\ = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \frac{1}{a^2} K_{n-1}(x), \end{aligned}$$

причем

$$K_1(x) - \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Отметим, что для вычисления неопределенных интегралов $\int P_n(x) e^{ax} dx$, $\int P_n(x) \cos bx dx$, $\int P_n(x) \sin bx dx$, где $P_n(x)$ многочлен степени n , можно использовать метод неопределенных коэффициентов, поскольку первообразная имеет такую же структуру, как и подынтегральная функция.

Пример 9.26. Вычислить $I = \int (x^2 + x + 2)e^x dx$.

Решение. Так как $P_n(x) = x^2 + x + 2$, $n = 2$, то первообразная будет иметь вид $Q_2(x)e^x$, где $Q_2(x) = (Ax^2 + Bx + E)e^x$ с неопределенными коэффициентами A , B , E .

Итак, $\int (x^2 + x + 2)e^x dx = (Ax^2 + Bx + E)e^x + C$. Продифференцируем это равенство:

$$(x^2 + x + 2)e^x = (2Ax + B + Ax^2 + Bx + E)e^x.$$

Сократим полученное равенство на e^x , в результате придем к тождественному равенству многочленов $x^2 + x + 2 = Ax^2 + (2A + B)x + B + E$, откуда

$$\begin{aligned}x^2: & A = 1, \\x^1: & 2A + B = 1 \Rightarrow B = -1, \\x^0: & B + E = 2 \Rightarrow E = 3.\end{aligned}$$

Таким образом, $I = (x^2 - x + 3)e^x + C$.

Пример 9.27. Вычислить $I = \int (3x + 2) \cos x dx$.

Решение. В этом случае

$$\int (3x + 2) \cos x dx = (Ax + B) \cos x + (Mx + N) \sin x + C,$$

где A, B, M, N — неопределенные коэффициенты. Продифференцировав равенство, получим следующее тождество:

$$(3x + 2) \cos x = A \cos x - (Ax + B) \sin x + M \sin x + (Mx + N) \cos x,$$

отсюда

$$\begin{aligned}\cos x: & A + Mx + N = 3x + 2, \\ \sin x: & M - (Ax + B) = 0,\end{aligned}$$

т. е.

$$x^1: \begin{cases} M = 3, \\ A = 0, \end{cases} \quad x^0: \begin{cases} A + N = 2, \\ M - B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} M = 3, & A = 0, \\ N = 2, & B = 3. \end{matrix}$$

Следовательно, $I = 3 \cos x + (3x + 2) \sin x + C$.

Пример 9.28. Вычислить $I = \int x^3(\sin x + \cos x) dx$.

Решение. В данном случае $\int x^3(\sin x + \cos x) dx = (Ax^3 + Bx^2 + Dx + E)\sin x + (ax^3 + bx^2 + dx + e)\cos x + C$, где A, B, D, E, a, b, d, e — неопределенные коэффициенты. Дифференцируя равенство, придем к следующему тождеству:

$$x^3(\sin x + \cos x) = (3Ax^2 + 2Bx + D - ax^3 - bx^2 - dx - e)\sin x + (Ax^3 + Bx^2 + Dx + E + 3ax^2 + 2bx + d)\cos x.$$

Отсюда

$$\sin x: 3Ax^2 + 2Bx + D - ax^3 - bx^2 - dx - e = x^3,$$

$$\cos x: Ax^3 + Bx^2 + Dx + E + 3ax^2 + 2bx + d = x^3.$$

Следовательно,

$$x^3: \begin{matrix} a = -1, \\ A = 1; \end{matrix} \quad x^2: \begin{matrix} 3A - b = 0, \\ B + 3a = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} b = 3, \\ B = 3; \end{matrix}$$

$$x^1: \begin{matrix} 2B - d = 0, \\ D + 2b = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} d = 6, \\ D = -6; \end{matrix} \quad x^0: \begin{matrix} D - e = 0, \\ E + d = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} e = -6, \\ E = -6. \end{matrix}$$

В результате

$$I = (x^3 + 3x^2 - 6x - 6)\sin x + (-x^3 + 3x^2 + 6x - 6)\cos x + C.$$

Пример 9.29. Вычислить $I = \int (x+1)e^{2x} dx$.

Решение. Поскольку

$$\int (x+1)e^{2x} dx = (Ax + B)e^{2x} + C,$$

то, дифференцируя данное равенство, получим

$$(x+1)e^{2x} = (2Ax + 2B + A)e^{2x} \Rightarrow 2Ax + 2B + A = x + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow A = 1/2, \quad B = 1/4.$$

Таким образом,

$$I = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C.$$

Упражнение 9.4. Вычислить неопределенные интегралы.

1. $\int x^3 e^{2x} dx.$

(Ответ: $\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right)e^{2x} + C$).

2. $\int x^2 \ln x dx.$

(Ответ: $\frac{1}{3}x^3 \left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C$).

3. $\int (x^2 + 1) \sin x dx.$

(Ответ: $(1 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C$).

4. $\int e^{ax} \sin bx dx.$

(Ответ: $\frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$).

5. $\int \sin(\ln x) dx.$

(Ответ: $\frac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x) + C$).

6. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$

(Ответ: $-x \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x| + C$).

Замечание. Производная элементарной функции — функция элементарная. С операцией интегрирования дело обстоит иначе. В некоторых случаях операция неопределенного интегрирования выводит, вообще говоря, из класса элементарных функций. Существуют неопределенные интегралы от элементарных функций, которые не выражаются через элементарные функции. Примеры таких неопределенных интегралов:

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int e^{x^2} dx, \quad \int \cos x^2 dx, \quad \int \sin x^2 dx,$$

$$\int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx.$$

9.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

9.3.1. Простейшие рациональные функции

Рациональная функция имеет вид

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — взаимно простые многочлены, причем $Q(x) \neq 0$. Не нарушая общности, старший коэффициент $Q(x)$ считаем равным 1.

Простейшими рациональными функциями называют рациональные функции следующих видов:

- 1) Ax^m ;
- 2) $\frac{A}{x-a}$;
- 3) $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k > 1$;
- 4) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$;
- 5) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$, $k > 1$, где $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Поскольку из неправильной рациональной функции (степень $P(x)$ больше или равна степени $Q(x)$) можно выделить целую часть (простейшую рациональную функцию вида 1)), разделив, например, числитель на знаменатель «уголком», то в дальнейшем будем рассматривать *правильные рациональные функции* (степень числителя меньше степени знаменателя).

Теорема 1. *Каждая правильная рациональная функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде суммы конечного числа простейших рациональных функций.*

Разложение правильной рациональной функции на простейшие связано с разложением знаменателя $Q(x)$ на простейшие действительные множители вида $x - a$ и $x^2 + px + q$, где $p^2/4 - q < 0$.

Теорема 2. Действительный многочлен $Q(x)$ может быть, и притом единственным образом, представлен в виде произведения действительных множителей:

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_n)^{k_n} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdots (x^2 + p_mx + q_m)^{l_m},$$

где $\frac{p_j^2}{4} - q < 0$, l_j кратность корней $\gamma_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\bar{\gamma}_j = \alpha_j - i\beta_j$, $j = \overline{1, m}$, а k_s кратность корня a_s , $s = \overline{1, n}$.

Пример 9.30. Разложить на действительные множители многочлен $x^3 - 3x^2 - x + 3$.

Решение. Найдем корни уравнения $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$. Целочисленными корнями уравнения могут быть делители свободного члена 3. Это ± 1 , ± 3 . Легко проверить, что $x = 1$, $x = -1$, $x = 3$ являются корнями уравнения. Следовательно,

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x + 1)(x - 3).$$

Заметим, что разложение на множители в данном примере можно получить и так:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - x + 3 &= x^2(x - 3) - (x - 3) = \\ &= (x - 3)(x^2 - 1) = (x - 3)(x - 1)(x + 1). \end{aligned}$$

Пример 9.31. Разложить на действительные множители многочлен $x^3 - 1$.

Решение. Используя формулу разности кубов $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, получим

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Так как дискриминант уравнения $x^2 + x + 1 = 0$ отрицательный, т. е. $D = 1 - 4 = -3$, то других действительных корней нет.

Пример 9.32. Разложить на действительные множители многочлен $x^4 + 5x^2 + 4$.

Решение. Легко проверить, что ни один из делителей $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ свободного члена не является корнем уравнения $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$. Поэтому поступим следующим образом. Положим $x^2 = t$, получим относительно t квадратное уравнение $t^2 + 5t + 4 = 0$, корнями которого являются $t = -1, t = -4$, следовательно, $t^2 + 5t + 4 = (t + 1)(t + 4)$, и для многочлена имеем

$$x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 1)(x^2 + 4).$$

Поскольку уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $x^2 + 4 = 0$ не имеют действительных корней, то разложение окончательное.

9.3.2. Вычисление коэффициентов разложения рациональной функции на простейшие

Приведенная теорема 1 для фактического построения разложения правильной рациональной функции на простейшие позволяет применять метод неопределенных коэффициентов. Представим правильную рациональную функцию в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{\nu=1}^k \frac{B_{\nu}}{(x-a)^{\nu}} + \dots + \sum_{\mu=1}^l \frac{M_{\mu}x + N_{\mu}}{(x^2 + px + q)^{\mu}}$$

с неопределенными коэффициентами $B_{\nu}, M_{\mu}, N_{\mu}$.

После умножения приведенного тождества на $Q(x)$ получим два совпадающих многочлена $P(x) = P^*(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Слева стоит многочлен $P(x)$ с известными коэффициентами. Коэффициенты правого многочлена $P^*(x)$ являются линейными комбинациями $B_{\nu}, M_{\mu}, N_{\mu}$. При построении системы уравнений для определения $B_{\nu}, M_{\mu}, N_{\mu}$ используют следующую теорему.

Теорема о равенстве многочленов. Для совпадения многочленов при всех значениях x необходимо и достаточно, что-

бы они имели одинаковые степени и равные соответствующие коэффициенты.

Приведем несколько практических способов вычисления коэффициентов B_ν , M_μ , N_μ .

9.3.2.1. Способ соответствующих коэффициентов. Многочлены $P(x)$ и $P^*(x)$ располагаются по убывающим степеням x . Приравнивая коэффициенты многочленов $P(x)$ и $P^*(x)$ при соответствующих степенях x , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно B_ν , M_μ , N_μ . Система имеет единственное решение при любых коэффициентах многочлена $P(x)$ и, следовательно, обладает ненулевым определителем. Коэффициенты B_ν , M_μ , N_μ полученной системы можно найти, например, по правилу Крамера.

Пример 9.33. Разложить на простейшие рациональную функцию $\frac{1}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$ и найти коэффициенты разложения.

Решение. Поскольку $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x+1)(x-3)$ (см. пример 9.30), то разложение на простейшие имеет вид

$$\frac{1}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}.$$

Домножив правую и левую части равенства на

$$(x-1)(x+1)(x-3) = x^3 - 3x^2 - x + 3,$$

получим тождество

$$A(x+1)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+1) = 1,$$

которое равносильно тождеству

$$A(x^2 - 2x - 3) + B(x^2 - 4x + 3) + C(x^2 - 1) = 1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему

$$\begin{aligned} x^2 : \quad & A + B + C = 0, \\ x^1 : \quad & -2A - 4B = 0, \\ x^0 : \quad & -3A + 3B - C = 1. \end{aligned}$$

Из второго уравнения следует, что $A = -2B$. Подставив его в первое и третье уравнения, получим

$$\begin{cases} -B + C = 0, \\ 9B - C = 1, \end{cases}$$

откуда $B = 1/8$, $C = 1/8$ и $A = -1/4$.

Таким образом,

$$\frac{1}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{-1/4}{x-1} + \frac{1/8}{x+1} + \frac{1/8}{x-3}.$$

Пример 9.34. Разложить на простейшие рациональную функцию $\frac{x-1}{x^2(x^2+1)}$ и найти коэффициенты разложения.

Решение. Поскольку $\frac{x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$, то

$$A(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Mx+N)x^2 - x - 1,$$

откуда

$$\begin{aligned} x^3 : & \begin{cases} B + M = 0, \\ A + N = 0, \end{cases} \\ x^2 : & \\ x^1 : & \begin{cases} B = 1, \\ A = -1. \end{cases} \\ x^0 : & \end{aligned}$$

Следовательно, $A = -1$, $B = 1$, $M = -1$, $N = 1$. Таким образом,

$$\frac{x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1}.$$

Пример 9.35. Разложить на простейшие рациональную функцию $\frac{x^3-1}{x(x^2+4)^2}$ и найти коэффициенты разложения.

Решение. Поскольку $\frac{x^3-1}{x(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+4)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+4}$, то

$$A(x^2+4)^2 + (Bx+C)x + (Mx+N)x(x^2+4) - x^3 - 1.$$

Отсюда получим

$$\begin{array}{l} x^4 : \\ x^3 : \\ x^2 : \\ x^1 : \\ x^0 : \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A + M = 0, \\ N = 1, \\ 8A + B + 4M = 0, \\ C + 4N = 0, \\ 16A = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} A = -\frac{1}{16}, \quad N = 1, \quad C = -4, \\ M = \frac{1}{16}, \quad B = \frac{1}{4}. \end{array}$$

Таким образом,

$$\frac{x^3 - 1}{x(x^2 + 4)^2} = \frac{-\frac{1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}x - 4}{(x^2 + 4)^2} + \frac{\frac{1}{16}x + 1}{x^2 + 4}.$$

9.3.2.2. Способ частных значений. Многочлены $P^*(x)$ и $P(x)$ не перераспределяются по степеням x . Придавая аргументу x подходящие конкретные значения, получим систему уравнений для неопределенных коэффициентов.

Пример 9.36. Применяя способ частных значений, найти коэффициенты разложений функции $\frac{1}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$ на простейшие.

Решение. Так как $\frac{1}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 3}$, то $A(x + 1)(x - 3) + B(x - 1)(x - 3) + C(x - 1)(x + 1) = 1$ (см. пример 9.33). Выберем для переменной x подходящие значения (нули знаменателя рациональной функции):

$$x = 1 \Rightarrow A \cdot 2 \cdot (-2) = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{4},$$

$$x = -1 \Rightarrow B \cdot (-2) \cdot (-4) = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{8},$$

$$x = 3 \Rightarrow C \cdot 2 \cdot 4 = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{8}.$$

Отметим, что за подходящие частные значения переменной x мы выбираем нули знаменателя рациональной функции.

Способ частных значений удобно использовать тогда, когда знаменатель рациональной функции имеет действительные корни.

9.3.2.3. Способ произвольных значений. При этом способе часто используют тождества, полученные из равенства $P(x) = P^*(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, дифференцированием по x .

Пример 9.37. Разложить на простейшие рациональную функцию $\frac{1}{x^4(x+1)}$ и найти коэффициенты разложения.

Решение. Так как $\frac{1}{x^4(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x^4} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^2} + \frac{E}{x}$, то

$$Ax^4 + B(x+1) + Cx(x+1) + Dx^2(x+1) + Ex^3(x+1) = 1.$$

Используя нули знаменателя $x = 0$ и $x = -1$ рациональной функции, получим $A = 1$ при $x = -1$ и $B = 1$ при $x = 0$. В результате имеем тождество

$$x^4 + (x+1) + Cx(x+1) + Dx^2(x+1) + Ex^3(x+1) = 1$$

или

$$x^4 + (x+1) + (Cx + Dx^2 + Ex^3)(x+1) = 1.$$

Дифференцируем по x :

$$4x^3 + 1 + Cx + Dx^2 + Ex^3 + (C + 2Dx + 3Ex^2)(x+1) = 0.$$

Полагая $x = 0$, получим $1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$.

Дифференцируем снова по x :

$$12x^2 - 1 + 2Dx + 3Ex^2 + (2D + 6Ex)(x+1) = 1 + 2Dx + 3Ex^2 = 0.$$

Полагая $x = 0$, получим $-1 - 1 + 2D = 0 \Rightarrow D = 1$.

Еще раз дифференцируем по x :

$$24x + 2 + 6Ex + 6E(x+1) + (2 + 6Ex) + 2 + 6Ex = 0.$$

Полагая $x = 0$, получим $2 + 6E + 2 + 2 = 0 \Rightarrow E = -1$.

Все коэффициенты найдены и, следовательно,

$$\frac{1}{x^4(x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

Отметим, что способ произвольных значений удобно применять тогда, когда знаменатель рациональной функции имеет действительные кратные корни. Ибо если многочлен $P(x)$ имеет корень a кратности k , то

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0, \quad P^{(k)}(a) \neq 0.$$

9.3.2.4. Способ домножения. При этом способе рассматривается непосредственно разложение рациональной функции на простейшие. Для нахождения коэффициентов разложения представление рациональной функции умножают на множители $(x - a)^k$ или $(x^2 + px + q)^\lambda$ и полагают $x = a$ или $x = \alpha + i\beta$.

Пример 9.38. Разложить на простейшие рациональную функцию $\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$ и найти коэффициенты разложения.

Решение. Все корни знаменателя действительные и рациональные. Следовательно,

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x-4}.$$

Умножив равенство сначала на $x-1$, а затем полагая $x = 1$, получим $A = \frac{1}{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)} = -\frac{1}{6}$. Далее поступим так же с множителями

$$x-2: B = \frac{8}{1 \cdot (-1) \cdot (-2)} = \frac{8}{2} = 4,$$

$$x-3: C = \frac{27}{2 \cdot 1 \cdot (-1)} = -\frac{27}{2},$$

$$x - 4 : D = \frac{64}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{32}{3}.$$

Таким образом,

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{-1/6}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{-27/2}{x-3} + \frac{32/3}{x-4}.$$

9.3.3. Различные подходы к отысканию коэффициентов в разложении рациональной функции на простейшие

9.3.3.1. Случай простых корней знаменателя. Рассмотрим правильную несократимую дробь $P(x)/Q(x)$. Пусть

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)Q_1(x)}, \quad \text{где } Q_1(a) \neq 0.$$

Тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Умножим левую и правую части на $x-a$, получим

$$(x-a) \frac{P(x)}{Q(x)} = A + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}(x-a).$$

Так как $Q(a) = 0$, то последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{P(x)}{\frac{Q(x)-Q(a)}{x-a}} = A + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}(x-a).$$

Переходя к пределу при $x \rightarrow a$, получим

$$\frac{P(a)}{Q'(a)} = A \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x) - Q(a)}{x - a} = Q'(a) \right).$$

Если многочлен $Q(x)$ имеет n действительных простых корней $a_1, a_2, \dots, a_n$, то в этом случае имеет место равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x-a_k} \cdot \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}.$$

Пример 9.39. Разложить на простейшие функцию $\frac{x}{x^2 - 5x + 6}$.

Решение. Поскольку $x = 2$ и $x = 3$ действительные простые корни знаменателя, то

$$\frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3},$$

где

$$A = \left. \frac{x}{(x^2 - 5x + 6)} \right|_{x=2} = \left. \frac{x}{2x - 5} \right|_{x=2} = -2,$$

$$B = \left. \frac{x}{(x^2 - 5x + 6)} \right|_{x=3} = \left. \frac{x}{2x - 5} \right|_{x=3} = 3.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3}{x - 3} - \frac{2}{x - 2}.$$

9.3.3.2. Домножение на x . Домножив на x разложение дроби $P(x)/Q(x)$ на простейшие и перейдя к пределу при $x \rightarrow \infty$, получим соотношение между частью неопределенных коэффициентов. Это в сочетании с другими приемами позволяет ускорить процесс нахождения неопределенных коэффициентов.

Пример 9.40. Разложить на простейшие функцию $\frac{x}{x^3 - 1}$.

Решение. Поскольку $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, то

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Исходя из п. 9.3.3.1, найдем коэффициент

$$A = \left. \frac{x}{(x^3 - 1)} \right|_{x=1} = \left. \frac{x}{3x^2} \right|_{x=1} = \frac{1}{3}.$$

Далее домножим на x правую и левую части разложения на простейшие, получим

$$\frac{x^2}{x^3 - 1} = \frac{Ax}{x - 1} + \frac{x(Bx + C)}{x^2 + x + 1}.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $x \rightarrow \infty$, получим $0 = A + B \Rightarrow B = -1/3$.

Для нахождения коэффициента C положим, например, $x = 0$ в разложении на простейшие: $0 = -A + C \Rightarrow C = 1/3$.

В результате

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{1}{3(x - 1)} - \frac{x - 1}{3(x^2 + x + 1)}.$$

Пример 9.41. Разложить на простейшие рациональную функцию $\frac{1}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$.

Решение. Поскольку $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x - 3)(x - 2)^2$, то

$$\frac{1}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{(x - 2)^2}.$$

Используя п. 9.3.3.1, найдем $A = \left. \frac{1}{3x^2 - 14x + 16} \right|_{x=3} = 1$. Домножая разложение на x и переходя к пределу при $x \rightarrow \infty$, получим $A + B = 0 \Rightarrow B = -1$. Положив далее в разложении $x = 0$, имеем

$$-\frac{1}{12} = -\frac{1}{3}A - \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}C.$$

Отсюда $C = -1$.

Таким образом,

$$\frac{1}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{(x - 2)^2}.$$

9.3.3.3. Использование тейлоровских разложений.

Пусть

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - a)^k Q_1(x)}, \quad \text{где } Q_1(a) \neq 0.$$

Тогда

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k Q_1(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Умножив обе части равенства на $(x-a)^k$, получим

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q_1(x)} &= A_0 + A_1(x-a) + \dots + A_{k-1}(x-a)^{k-1} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}(x-a)^k = \\ &= A_0 + A_1(x-a) + \dots + A_{k-1}(x-a)^{k-1} + 0((x-a)^{k-1}) \quad \text{при } x \rightarrow a. \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что $A_0 + A_1(x-a) + \dots + A_{k-1}(x-a)^{k-1}$ — многочлен Тейлора порядка $k-1$ для рациональной функции $P(x)/Q_1(x)$ в окрестности точки $x=a$.

Таким образом, неопределенные коэффициенты группы слагаемых, соответствующие корню $x=a$, можно найти по следующей схеме:

- 1) умножаем $P(x)/Q(x)$ на $(x-a)^k$, а так как $Q(x) = Q_1(x)(x-a)^k$, то получим $P(x)/Q_1(x)$;
- 2) для функции $P(x)/Q_1(x)$ записываем многочлен Тейлора порядка $k-1$ около точки $x=a$;
- 3) коэффициенты полученного многочлена и есть соответствующие значения искомых коэффициентов разложения.

Пример 9.42. Разложить на простейшие функцию $\frac{1}{x^4(x-1)}$.

Решение. Разложение на простейшие имеет вид

$$\frac{1}{x^4(x-1)} = \frac{A_0}{x^4} + \frac{A_1}{x^3} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x} + \frac{B}{x-1}.$$

Для нахождения коэффициента B домножим правую и левую части на $x-1$ и положим $x=1$. В результате получим $B =$

$$\left. \frac{1}{x^4} \right|_{x=1} = 1. \text{ Далее:}$$

- 1) умножим функцию $\frac{1}{x^4(x-1)}$ на x^4 , получим $\frac{1}{x-1}$;

2) разложим функцию $\frac{1}{x-1}$ по степеням x до x^3 :

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -1 - x - x^2 - x^3 + o(x^3);$$

3) из разложения получаем $A_0 = -1$, $A_1 = -1$, $A_2 = -1$, $A_3 = -1$.

Таким образом,

$$\frac{1}{x^4(x-1)} = -\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}.$$

Пример 9.43. Разложить на простейшие функцию $f(x) = \frac{1}{x^4(x-1)^2}$.

Решение. Разложение на простейшие имеет вид

$$\frac{1}{x^4(x-1)^2} = \frac{A_0}{x^4} + \frac{A_1}{x^3} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x} + \frac{B_0}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1}.$$

Умножим исходную функцию $f(x)$ на x^4 и запишем многочлен Тейлора для функции $\frac{1}{(x-1)^2}$ по степеням x до x^3 . Поскольку

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \left(\frac{-1}{x-1} \right)', \text{ то}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2} = (1+x+x^2+x^3+x^4+o(x^4))' = 1+2x+3x^2+4x^3+o(x^3).$$

Отсюда $A_0 = 1$, $A_1 = 2$, $A_2 = 3$, $A_3 = 4$.

Для отыскания коэффициентов B_0 и B_1 умножим функцию $f(x)$ на $(x-1)^2$, а для функции $1/x^4$ запишем многочлен Тейлора около точки $x=1$ до слагаемого $(x-1)$:

$$f(x) = \frac{1}{x^4} = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + o(x-1), \quad x \rightarrow 1.$$

Так как

$$f(1) = \frac{1}{x^4} \Big|_{x=1} = 1, \quad f'(1) = \left(\frac{1}{x^4} \right) \Big|_{x=1} = -\frac{4}{x^5} \Big|_{x=1} = -4,$$

то $\frac{1}{x^4} = 1 - 4(x-1) + o(x-1)$, при $x \rightarrow 1$. Отсюда получаем $B_0 = 1$, $B_1 = -4$. Таким образом,

$$\frac{1}{x^4} = \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-1}.$$

Пример 9.44. Разложить на простейшие функцию $f(x) = \frac{x+3}{x^4(x-1)^2}$.

Решение. Разложение на простейшие имеет вид

$$\frac{x+3}{x^4(x-1)^2} = \frac{A_0}{x^4} + \frac{A_1}{x^3} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x} + \frac{B_0}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1}.$$

Домножим исходную функцию $f(x)$ на x^4 и построим многочлен Тейлора для новой функции $\frac{x+3}{(x-1)^2}$ по степеням x до x^3 , для чего воспользуемся предыдущим примером:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{(x-1)^2} &= (x+3)(1+2x+3x^2+4x^3+o(x^3)) = \\ &= 3+7x+11x^2+15x^3+o(x^3) \quad \text{при } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда получим коэффициенты $A_0 = 3$, $A_1 = 7$, $A_2 = 11$, $A_3 = 15$.

Далее домножим функцию $f(x)$ на $(x-1)^2$ и для полученной функции $\frac{x+3}{x^4}$ построим многочлен Тейлора по степеням $(x-1)$ до слагаемого $(x-1)$. Снова воспользуемся предыдущим примером:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x^4} &= (4+(x-1))(1-4(x-1)+o(x-1)) = \\ &= 4-15(x-1)+o(x-1) \quad \text{при } x \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Получим коэффициенты $B_0 = 4$, $B_1 = -15$.

Следовательно, искомое разложение имеет вид

$$\frac{x+3}{x^4(x-1)^2} = \frac{3}{x^4} + \frac{7}{x^3} + \frac{11}{x^2} + \frac{15}{x} + \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{15}{x-1}.$$

Замечание. В случае простого корня коэффициент $A_0 = P(a)/Q_1(a)$, полученный методом домножения, есть свободный член многочлена Тейлора нулевого порядка.

Замечание. В случае только действительных корней знаменателя можно получить полное разложение $P(x)/Q(x)$, пользуясь последовательно только тейлоровскими разложениями. Для разложения многочленов, стоящих в числителе, по степеням двучлена $x - a$ может быть использована схема Горнера.

Замечание. Все приемы вычисления неопределенных коэффициентов разложения на простейшие рациональной функции, изложенные в п. 9.3.3, предложены А.Ф. Наумовичем и В.И. Булатовым.

Для простоты разложения приведем некоторые тейлоровские разложения:

$$1. \frac{1}{x - \alpha} = -\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}x - \frac{1}{\alpha^3}x^2 - \frac{1}{\alpha^4}x^3 - \dots$$

$$2. \frac{1}{(x - \alpha)^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3}x + \frac{3}{\alpha^4}x^2 + \frac{4}{\alpha^5}x^3 - \dots$$

$$3. \frac{1}{(x - \alpha)^3} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1 \cdot 2}{\alpha^3} + \frac{2 \cdot 3}{\alpha^4}x + \frac{3 \cdot 4}{\alpha^5}x^2 + \dots \right).$$

$$4. \frac{1}{x^2 + px + q} = \frac{1}{q} - \frac{p^2}{q^2}x + \left(\frac{p^2}{q^3} - \frac{1}{q^2} \right)x^2 + \left(-\frac{p^3}{q^4} + \frac{2p}{q^3} \right)x^3 + \left(\frac{p^4}{q^5} - \frac{3p^2}{q^4} + \frac{1}{q^3} \right)x^4 + \dots$$

$$5. \frac{1}{(x^2 + px + q)^2} = \frac{1}{q^2} - \frac{2p^2}{q^3}x + \left(\frac{p^4}{q^4} + \frac{2}{q} \left(\frac{p^2}{q^3} - \frac{1}{q^2} \right) \right)x^2 - \dots$$

Упражнение 9.5. Записать разложение рациональной функции на простейшие. Найти коэффициенты разложения.

$$1. \frac{x}{(x^2 + 3x + 2)(x - 3)}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1/4}{x + 1} + \frac{-2/5}{x + 2} + \frac{3/20}{x - 3}).$$

$$2. \frac{2x^4 + 5x^2 - 2}{2x^3 - x - 1}. \quad (\text{Ответ: } x + \frac{1}{x-1} + \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}).$$

$$3. \frac{2x^3 + x^2 + 5x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{2x}{x^2 - x + 1}).$$

$$4. \frac{x^4 + 1}{x^5 + x^4 - x^3 - x^2}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1/2}{x-1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1/2}{x+1}).$$

$$5. \frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}. \quad (\text{Ответ: } \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2x-4}{(x^2+1)^2}).$$

9.3.4. Вычисление неопределенных интегралов от рациональных функций

Для вычисления неопределенного интеграла от рациональной функции сначала выделяют целую часть, полученную правильную рациональную функцию разлагают на простейшие рациональные функции, а затем интегрируют каждое слагаемое.

$$1. \int Ax^k dx = A \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$2. \int A \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C, \quad k > 1.$$

$$3. \int A \frac{dx}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

$$4. I = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx, \quad \Delta = q - \frac{p^2}{4}.$$

$$I = \left[\text{выделим полный квадрат: } x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} \right] = \int \frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{положим } x + \frac{p}{2} = t \Rightarrow dx = dt, \\ x = t - \frac{p}{2}, \quad \Delta = q - \frac{p^2}{4} - a^2 \end{array} \right] = \int \frac{M(t - \frac{p}{2}) + N}{t^2 + a^2} dt =$$

$$\int \frac{Mt + (N - \frac{p}{2}M)}{t^2 + a^2} dt = \left[\text{воспользуемся свойством} \right.$$

линейности] $= \left(N - \frac{p}{2}M \right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} + M \int \frac{t}{t^2 + a^2} dt =$

$$\left[\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C, \quad t dt = \frac{1}{2} dt^2 \right] =$$

$$\frac{N - \frac{p}{2}M}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + \frac{M}{2} \int \frac{dt^2}{t^2 + a^2} = \frac{N - \frac{p}{2}M}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + \frac{M}{2} \ln(t^2 +$$

$$+ a^2) + C = \frac{N - \frac{p}{2}M}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + C.$$

$$5. I = \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^l}, \quad \Delta = q - \frac{p^2}{4} > 0, \quad l > 1.$$

$$I = \left[\text{см. п. 4} \quad \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t, \\ \Delta = a^2 \end{array} \right] = \int \frac{Mt}{(t^2 + a^2)^l} dt + \int \frac{N - M\frac{p}{2}}{(t^2 + a^2)^l} dt =$$

$$\frac{M}{2(1-l)} \frac{1}{(t^2 + a^2)^{l-1}} + \left(N - M\frac{p}{2} \right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^l}.$$

При вычислении $\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^l}$ использовалась рекуррентная формула из п. 9.2.4 (см. с. 341).

Вывод. Неопределенный интеграл от рациональной функции берется в конечном виде, т. е. выражается через элементарные функции. Точнее, неопределенный интеграл от рациональной функции представляет собой сумму рациональных функций, выражений $A \ln|x - \lambda|$, $A \ln(x^2 + px + q)$, $A \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}$ и произвольной постоянной.

Замечание. На практике при вычислении $\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx$ поступают следующим образом:

- 1) в числителе выделяют производную знаменателя;

- 2) разбивают интеграл на два слагаемых;
 3) первообразная одного из интегралов — логарифм знаменателя, второго — арктангенс.

Пример 9.45. Вычислить $\int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$.

Решение. Используя примеры 9.33 или 9.36, имеем $\int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \int \left(\frac{-1/4}{x-1} + \frac{1/8}{x+1} + \frac{1/8}{x-3} \right) dx = \left[\text{свойство линейности, таблица интегралов} \right] = -\frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{8} \ln|x+1| + \frac{1}{8} \ln|x-3| + C$.

Пример 9.46. Вычислить $\int \frac{x-1}{x^2(x^2+1)} dx$.

Решение. Используя пример 9.34, имеем $\int \frac{x-1}{x^2(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1} \right) dx = \left[\text{линейность} \right] = \frac{1}{x} + \ln|x| - \int \frac{x dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctg x + C$.

Пример 9.47. Вычислить $\int \frac{dx}{x^4(x+1)}$.

Решение. Исходя из примера 9.37, получим, что $\int \frac{dx}{x^4(x+1)} = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \ln|x+1| - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} - \ln|x| + C$.

Пример 9.48. Вычислить $\int \frac{x^3-1}{x(x^2+4)^2} dx$.

Решение. Исходя из примера 35, получим, что $\int \frac{x^3-1}{x(x^2+4)^2} dx = \int \left(\frac{-1/16}{x} + \frac{\frac{1}{16}x+1}{x^2+4} + \frac{\frac{1}{4}x-4}{(x^2+4)^2} \right) dx = \left[\text{линейность} \right] = -\frac{1}{16} \ln|x| + \int \frac{\frac{1}{16}x+1}{x^2+4} dx + \int \frac{\frac{1}{4}x-4}{(x^2+4)^2} dx$.

$$\begin{aligned} \text{Вычислим интеграл } I_1 &= \int \frac{\frac{1}{16}x+1}{x^2+4} dx = \left[\text{линейность} \right] = \\ &= \frac{1}{16} \int \frac{x dx}{x^2+4} + \int \frac{dx}{x^2+4} = \left[d(x^2+4) = 2x dx \right] = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} + \\ &+ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} = \left[x^2+4 = t \Rightarrow \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln(x^2+4) + \right. \\ &\left. + C \right] = \frac{1}{32} \ln(x^2+4) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Вычислим } I_2 &= \int \frac{\frac{1}{4}x-4}{(x^2+4)^2} dx = \left[\text{линейность} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{x dx}{(x^2+4)^2} - 4 \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4)}{(x^2+4)^2} - 4I_3 = \left[\int \frac{dt}{t^2} = \right. \\ &\left. - \frac{1}{t}, t = x^2+4 \right] = -\frac{1}{8} \frac{1}{x^2+4} - 4I_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Вычислим } I_3 &= \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{4 dx}{(x^2+4)^2} = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{(x^2+4) - x^2}{(x^2+4)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2+4} - \int \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{4} I_4. \end{aligned}$$

Для вычисления $I_4 = \int \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^2}$ применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{x \cdot x dx}{(x^2+4)^2} = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \frac{x dx}{(x^2+4)^2}, \quad v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+4} \end{array} \right] = \\ &= -\frac{x}{2} \frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+4} = -\frac{1}{2} \frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3-1}{x^2(x^2+4)^2} dx &= -\frac{1}{16} \ln|x| + \frac{1}{32} \ln(x^2+4) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \\ &- \frac{1}{8} \frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{16} \ln |x| + \frac{1}{32} \ln(x^2+4) + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+4} + C.$$

Пример 9.49. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 1} dx$.

Решение. Поскольку подынтегральная функция есть неправильная рациональная дробь, то выделим целую часть, разделив «уголком»:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x + 2 & x^2 + 2x + 1 \\ \hline x^3 + 2x^2 + 2x & x - 2 \\ \hline -2x^2 + x + 2 & \\ -2x^2 - 4x - 2 & \\ \hline 5x + 4 & \end{array}$$

Следовательно, $\frac{x^3 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 1} = x - 2 + \frac{5x + 4}{x^2 + 2x + 2}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx &= \int \left(x - 2 + \frac{5x + 4}{x^2 + 2x + 2} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + I_1. \end{aligned}$$

Вычислим $I_1 = \int \frac{5x + 4}{x^2 + 2x + 2} dx$. Поскольку уравнение $x^2 + 2x + 2 = 0$ не имеет действительных корней, то подынтегральная функция представляет собой простейшую дробь. Далее используем замечание на с. 361–362.

Итак, $I_1 = \int \frac{5x + 4}{x^2 + 2x + 2} dx = \left[(x^2 + 2x + 2)' = 2x + 2, \text{ выделим в числителе производную знаменателя} \right] = 5 \int \frac{x + 4/5}{x^2 + 2x + 2} dx =$

$$\frac{5}{2} \int \frac{2x + 8/5}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{5}{2} \int \frac{(2x + 2) + 8/5 - 2}{x^2 + 2x + 2} dx =$$

$$\frac{5}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx + \frac{5}{2} \int \frac{-2/5}{x^2 + 2x + 2} dx = \left[\text{во втором интеграле} \right]$$

в знаменателе выделим полный квадрат: $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$]

$$= \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2 + 2x + 2)}{x^2 + 2x + 2} - \int \frac{dx}{1 + (x + 1)^2} = \left[\frac{dt}{t} = \ln|t| + C, \right.$$

$t = x^2 + 2x + 2, dx = d(x + 1)$]

$$= \frac{5}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) - \operatorname{arctg}(x + 1) + C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^3 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{5}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) - \operatorname{arctg}(x + 1) + C.$$

Пример 9.50. Вычислить $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 2x^3 + 2}$.

Решение. Отметим, что подынтегральная функция является рациональной, но не относится к простейшим. Поскольку $d(x^3) = 3x^2 dx$, то поступим следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{x^6 + 2x^3 + 2} &= \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2 + 2x^3 + 2} = \left[\text{положим } x^3 = t \right] = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} = \left[\text{знаменатель не имеет действительных корней; } t^2 + 2t + 2 = (t + 1)^2 + 1 \text{ выделили полный квадрат} \right] = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{1 + (t + 1)^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(t + 1) + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x^3 + 1) + C. \end{aligned}$$

Пример 9.51. Вычислить $\int \frac{(x^3 + x) dx}{x^4 - x^2 + 1}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^3 + x) dx}{x^4 - x^2 + 1} &= \left[\text{вынесем в числителе } x \text{ за скобки} \right] = \int \frac{(x^2 + 1)^2 x dx}{x^4 - x^2 + 1} = \left[\text{внесем } x \text{ под знак дифференциала: } x dx = \frac{1}{2} dx^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 1) dx^2}{(x^2)^2 - x^2 + 1} = \left[\text{положим } x^2 = t \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(t + 1) dt}{t^2 - t + 1} = \left[\text{знаменатель действительных корней не имеет, выделим в числителе производную знаменателя } (t^2 - t + 1)' = 2t - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2t + 2}{t^2 - t + 1} dt = \frac{1}{4} \left(\int \frac{2t - 1}{t^2 - t + 1} dt + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int \frac{3 dt}{t^2 - t + 1} \Big) = \frac{1}{4} \int \frac{d(t^2 - t + 1)}{t^2 - t + 1} + \frac{3}{4} \int \frac{dt}{(t - 1/2)^2 + 3/4} = \\
& \frac{1}{4} \ln(t^2 - t + 1) + \frac{3}{4} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{(t - 1/2) \cdot 2}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{4} \ln(x^4 - x^2 + \\
& + 1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{(2x^2 - 1)}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

9.3.5. Метод Остроградского для выделения рациональной части

Рассмотрим правильную рациональную несократимую дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $Q(x) = (x - a)^k \cdots (x^2 + px + q)^m \cdots$, $\frac{p^2}{4} - q < 0$. Тогда

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx,$$

причем

$$Q_1(x) = (x - a)^{k-1} \cdots (x^2 + px + q)^{m-1} \cdots,$$

$$Q_2(x) = (x - a) \cdots (x^2 + px + q) \cdots,$$

т. е. $Q_1(x)Q_2(x) = Q(x)$; $P_1(x)$, $P_2(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами, степень $P_1(x)$ на единицу меньше степени $Q_1(x)$; степень $P_2(x)$ на единицу меньше степени $Q_2(x)$.

Пример 9.52. Используя метод Остроградского, вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x+1)^2(x^2+1)^2} dx$.

Решение. Имеем $Q_1(x) = Q_2(x) = (x+1)(x^2+1)$, $P_1(x) = ax^2 + bx + c$, $P_2(x) = dx^2 + ex + f$. Тогда

$$\begin{aligned}
& \int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x+1)^2(x^2+1)^2} dx = \\
& = \frac{ax^2 + bx + c}{(x+1)(x^2+1)} + \int \frac{dx^2 + ex + f}{(x+1)(x^2+1)} dx.
\end{aligned}$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов продифференцируем последнее равенство. Получим

$$\frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \left(\frac{ax^2 + bx + c}{(x+1)(x^2+1)} \right)' + \frac{dx^2 + ex + f}{(x+1)(x^2+1)},$$

т. е.

$$\begin{aligned} & \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \\ & = \frac{(2ax + b)(x+1)(x^2+1) - (ax^2 + bx + c)(x^2+1 + 2x(x+1))}{(x+1)^2(x^2+1)^2} + \\ & \quad + \frac{dx^2 + ex + f}{(x+1)(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Отсюда $4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8 = (2ax + b)(x^3 + x^2 + x + 1) - (ax^2 + bx + c)(3x^2 + 2x + 1) + (dx^2 + ex + f)(x^3 + x^2 + x + 1)$.

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему

$$\begin{aligned} x^5: & \quad d = 0, \\ x^4: & \quad 2a - 3a + d + e = 4 \Rightarrow e - a = 4, \\ x^3: & \quad 2a + b - 2a - 3b + d + e + f = 4 \Rightarrow -2b + e + f = 4, \\ x^2: & \quad 2a + b - a - 2b - 3c + d + e + f = 16 \Rightarrow \\ & \quad \Rightarrow a - b - 3c + e + f = 16, \\ x^1: & \quad 2a + b - b - 2c + e + f = 12 \Rightarrow 2a - 2c + e + f = 12, \\ x^0: & \quad b - c + f = 8, \end{aligned}$$

т. е. систему

$$\begin{cases} e - a = 4, \\ -2b + e + f = 4, \\ a - b - 3c + e + f = 16, \\ 2a - 2c + e + f = 12, \\ b - c + f = 8, \end{cases}$$

решая которую получим $a = -1$, $b = 1$, $c = -4$, $d = 0$, $e = 3$, $f = 3$.

Итак, искомый интеграл

$$\int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x+1)^2(x^2+1)^2} dx = \frac{-x^2 + x - 4}{(x+1)(x^2+1)} +$$

$$+ 3 \int \frac{x+1}{(x+1)(x^2+1)} dx = \frac{-x^2 + x - 4}{(x+1)(x^2+1)} + 3 \operatorname{arctg} x + C.$$

Пример 9.53. Вычислить $\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

Решение. Поскольку знаменатель подынтегральной функции имеет кратные корни, то применим метод Остроградского:

$$\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{ax^2 + bx + c}{(x-1)(x+1)^2} + \int \frac{mx + n}{(x-1)(x+1)} dx.$$

Так как $\int \frac{mx + n}{(x-1)(x+1)} dx$ будем вычислять, раскладывая на простейшие дроби, то мы это учтем. Тогда получим

$$\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{ax^2 + bx + c}{(x-1)(x+1)^2} + \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \right) dx.$$

Дифференцируем последнее равенство:

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} +$$

$$\frac{(2ax+b)(x-1)(x+1)^2 - (ax^2+bx+c)((x+1)^2 + 2(x-1)(x+1))}{(x-1)^2(x+1)^4}.$$

Упростим:

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} +$$

$$+ \frac{(2ax+b)(x^2-1) - (ax^2+bx+c)(3x-1)}{(x-1)^2(x+1)^3}.$$

Отсюда $x = (2ax + b)(x^2 - 1) - (ax^2 + bx + c)(3x - 1) + A(x - 1)(x + 1)^3 + B(x - 1)^2(x + 1)^2$ или $x = (2ax + b)(x^2 - 1) - (ax^2 + bx + c)(3x - 1) + A(x^2 - 1)(x^2 + 2x + 1) + B(x^2 - 1)^2$.

Полагая $x = 1$, $x = -1$, получим

$$\begin{cases} 1 = -2(a + b + c), \\ -1 = 4(a - b + c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = -\frac{1}{2}, \\ a - b + c = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b = -\frac{1}{4} \Rightarrow b = -\frac{1}{8}, \\ a + c = -\frac{3}{8}. \end{cases}$$

Далее сравним коэффициенты:

$$\begin{aligned} x^4 : \quad & A + B = 0, \\ x^3 : \quad & 2a - 3a + 2A = 0, \\ x = 0 : \quad & -b + c - A + B = 0. \end{aligned}$$

Из системы

$$\begin{cases} a + c = -3/8, \\ A + B = 0, \\ 2c - a = 0, \\ -b + c - A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = -3/8, \\ 2A - a = 0, \\ A + B = 0, \\ -A + B + c = -1/8 \end{cases}$$

найдем $a = -\frac{1}{8}$, $c = -\frac{1}{4}$, $A = -\frac{1}{16}$, $B = \frac{1}{16}$.

Таким образом,

$$\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}}{(x-1)(x+1)^2} + \int \left(\frac{-1/16}{x-1} + \frac{1/16}{x+1} \right) dx,$$

т. е.

$$\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{1}{8} \frac{x^2 + x + 2}{(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C.$$

Упражнение 9.6. Вычислить неопределенные интегралы.

$$1. \int \frac{x^3 dx}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}. \quad (\text{Ответ: } -\frac{1}{6} \ln|x-1| + \\ + 4 \ln|x-2| - \frac{27}{2} \ln|x-3| + \frac{32}{3} \ln|x-4| + C).$$

$$2. \int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}. \quad (\text{Ответ: } \ln|x+2| - \ln|x+3| + C).$$

$$3. \int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{3}{2} \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1} + \\ + \ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 4 \operatorname{arctg} x + C).$$

$$4. \int \frac{x^4 dx}{x^4 - 1}. \quad (\text{Ответ: } x + \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| - \\ - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C = x + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C).$$

$$5. \int \frac{2x+3}{x^2+3x+4} dx. \quad (\text{Ответ: } \ln(x^2+3x+4) + C).$$

$$6. \int \frac{2x+5}{x^2+3x+4} dx. \\ (\text{Ответ: } \ln(x^2+3x+4) + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{7}} + C).$$

$$7. \int \frac{x^3 dx}{x^8 + 2x^4 + 2}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{4} \operatorname{arctg}(x^4 + 1) + C).$$

$$8. \int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{9} \ln|x^3 + 1| - \frac{1}{9} \ln|(x^3 - 2)^2| + C).$$

$$9. \int \frac{2x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 40x + 20}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)^3} dx. \quad (\text{Ответ: } \\ \frac{2x^3 - 6x^2 + 8x - 9}{(x^2 - 2x + 2)^2} + \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + 2 \operatorname{arctg}(x-1) + C).$$

$$10. \int \frac{x^6 - x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{(x+1)^2(x^2+x+1)^3} dx.$$

$$(\text{Ответ: } -\frac{x^4 - 2x^3 + 1}{(x+1)(x^2+x+1)^2} + C).$$

$$11. \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

$$(\text{Ответ: } \frac{3x^3 + 5x}{8(x^2+1)^2} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + C).$$

9.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Некоторые часто встречающиеся интегралы от иррациональных функций можно вычислить *методом рационализации* подынтегральной функции. Этот метод заключается в отыскании такой подстановки, которая преобразует интеграл от иррациональной функции в интеграл от функции рациональной.

Через $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будем обозначать функцию, рациональную относительно каждой из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Например,

$$\frac{x^2 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{1+x^3}} = R(x, \sqrt{x}, \sqrt{1+x^3}) = R(x_1, x_2, x_3),$$

где $x_1 = x, x_2 = \sqrt{x}, x_3 = \sqrt{1+x^3}$.

9.4.1. Интегрирование выражений вида $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)$

Отметим, что иррациональности вида $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, m \in \mathbb{N}$, рассматриваются лишь на тех интервалах изменения x , на которых они принимают действительное значение.

В интеграле $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx$ положим $\sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}} = t$.

Тогда

$$t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \Rightarrow x = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}, \quad dx = \frac{m(\alpha\delta - \gamma\beta)t^{m-1}}{(\alpha - \gamma t^m)^2} dt.$$

В результате такой замены переменной полученный интеграл будет представлять собой интеграл от рациональной функции с переменной интегрирования t .

Пример 9.54. Вычислить $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$.

Решение. Положим $\frac{1-x}{1+x} = t^2 \Rightarrow 1-x = t^2(1+x) \Rightarrow (t^2 + 1)x = 1 - t^2 \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \Rightarrow dx = \frac{-2t(t^2+1) - 2t(1-t^2)}{(t^2+1)^2} dt = \frac{-4t}{(t^2+1)^2} dt$.

Тогда $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = -4 \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2} dt =$

$$= \left[\begin{array}{l} u = t, \quad du = dt, \quad dv = \frac{t}{(1+t^2)^2} dt, \\ v = \int \frac{t dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right] =$$

$$= -4 \left(-\frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} \right) = \frac{2t}{1+t^2} - 2 \operatorname{arctg} t + C,$$

где $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Пример 9.55. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)(x+1)^3}} = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{1}{x+1}.$$

Положим $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = t^3 \Rightarrow x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx = -\frac{6t^2 dt}{(t^3-1)^2}$, $x+1 = \frac{2t^3}{t^3-1} \Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{t^3-1}{2t^3}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} &= \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1} = \\ &= \int \frac{-3 dt}{t^3-1} = -3 \int \frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)} = I. \end{aligned}$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)} &= \frac{A}{t-1} + \frac{Mt+N}{t^2+t+1} \Rightarrow \\ \Rightarrow A(t^2+t+1) + (Mt+N)(t-1) &= 1 : \end{aligned}$$

$$t=1: \quad 3A=1 \Rightarrow A=1/3,$$

$$t^2: \quad A+M=0 \Rightarrow M=-1/3,$$

$$t^0: \quad A-N=1 \Rightarrow N=1/3-1=-2/3.$$

$$\begin{aligned} \text{Поэтому } I &= -3 \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}}{t^2+t+1} \right) dt = \int \left(\frac{-1}{t-1} + \right. \\ &+ \left. \frac{t+2}{t^2+t+1} \right) dt = -\ln|t-1| + \int \frac{t+2}{t^2+t+1} dt = \left[(t^2+t+1)' = \right. \\ &2t+1 \left. \right] = -\ln|t-1| + \frac{1}{2} \int \frac{2t+1+3}{t^2+t+1} dt = -\ln|t-1| + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} + \frac{3}{2} \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = -\ln|t-1| + \frac{1}{2} \ln(t^2+ \\ &+ t+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{(2t+1)}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Окончательно получим, что } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} &= -\ln|t- \\ &- 1| + \frac{1}{2} \ln(t^2+t+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{(2t+1)}{\sqrt{3}} + C, \text{ где } t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}. \end{aligned}$$

Пример 9.56. Вычислить $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx$.

Решение. В данном случае дробно-линейная функция $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, в частности, свелась просто к линейной функции.

Положим $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1, dx = 2t dt$. Тогда $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx = 2 \int \frac{(t+2)t}{t^4-t} dt = 2 \int \frac{t+2}{t^3-1} dt =$
 $\left[\text{используем разложение на простейшие} \right] = \int \left(\frac{2}{t-1} - \frac{2t+2}{t^2+t+1} \right) dt = \int \frac{2 dt}{t-1} - \int \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt - \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} =$
 $2 \ln |t-1| - \ln(t^2+t+1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, \text{ где } t = \sqrt{x+1}.$

Пример 9.57. Вычислить $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$.

Решение. Подынтегральная функция является рациональной относительно переменных $x_1 = x, x_2 = x^{1/3}, x_3 = x^{1/6}$. В данном случае положим $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$. Тогда $\int \frac{x + x^{2/3} + x^{1/6}}{x(1 + x^{1/3})} dx = 6 \int \frac{t^5(t^6 + t^4 + t)}{t^6(1 + t^2)} dt =$
 $6 \int \frac{t^5 + t^3 + 1}{1 + t^2} dt = 6 \int \left(t^3 + \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = \frac{6}{4} t^4 + 6 \operatorname{arctg} t +$
 $+ C = \frac{3}{2} x^{2/3} + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.$

Упражнение 9.7. Вычислить неопределенные интегралы.

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1}}.$$

(Ответ: $2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln |t+1| + C, \quad t = \sqrt[6]{x-1}$).

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{3}{8} t^2 + C, \quad t = \sqrt[3]{\frac{2+x}{2-x}}).$$

$$3. \int \frac{1 - 2\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}} dx. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{x} - x - \ln(2\sqrt{x} + 1) + C).$$

$$4. \int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x + \sqrt[3]{x+2}} dx. \quad (\text{Ответ: } 3t + \frac{3}{4} \ln|t-1| - \frac{3}{8} \ln|t^2 + t + 2| - \frac{33}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C, \quad t = \sqrt[3]{x+2}).$$

$$5. \int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx. \quad (\text{Ответ: } x + 4\sqrt{x+1} + 4 \ln|\sqrt{x+1} - 1| + C).$$

$$6. \int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{2} (x-2) \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C).$$

9.4.2. Интегрирование выражений вида $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$. Подстановки Эйлера

Рассмотрим неопределенный интеграл

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad b^2 - 4ac \neq 0.$$

Выделим следующие три случая.

$$1. a > 0, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} + t.$$

Возведем в квадрат: $ax^2 + bx + c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}xt + t^2$, откуда получим $bx + c = \pm 2\sqrt{a}xt + t^2$ и выразим $x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}}$. Та-

ким образом, x — рациональная функция t , следовательно, x' также рациональная функция t . А это означает, что под интегралом получается рациональная функция.

$$2. c > 0, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{c} + xt.$$

Возведем в квадрат: $ax^2 + bx + c = c \pm 2\sqrt{c}xt + x^2t^2 \Rightarrow ax^2 + bx = \pm 2\sqrt{c}xt + x^2t^2 \Rightarrow x = \frac{b \mp 2t\sqrt{c}}{t^4 - a} \Rightarrow x'$ — рациональная

функция $\Rightarrow$ подынтегральная функция рациональная функция переменной t .

$$3. \ b^2 - 4ac > 0, \ x^2 + bx + c = (x - a_1)(x - a_2), \ \sqrt{x^2 + bx + c} = (x - a_1)t.$$

Возводя в квадрат $(x - a_1)(x - a_2) = (x - a_1)^2 t^2$ и сокращая на $(x - a_1)$, получим $x = \frac{a_1 t^2 - a_2}{t^2 - 1}$. Снова x' рациональная функция, и, следовательно, подынтегральная функция является рациональной.

Отметим, что в последнем случае можно было делать и такую замену: $\sqrt{x^2 + bx + c} = (x - a_2)t$.

Приведенные три подстановки и называются *подстановками Эйлера*.

Пример 9.58. Вычислить $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Решение. Поскольку $a = 1 > 0$, то проведем первую подстановку Эйлера $\sqrt{x^2 + x + 1} = \pm x + t$.

Учитывая вид знаменателя дроби подынтегрального выражения, положим $\sqrt{x^2 + x + 1} = -x + t$, так как в этом случае знаменатель $\sqrt{x^2 + x + 1} + x = t$. Осуществим замену:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x + 1} = -x + t &\Rightarrow x^2 + x + 1 = x^2 - 2xt + t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x + 1 = -2xt + t^2 &\Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t} \Rightarrow dx = \frac{2(t^2 + t + 1)}{(2t + 1)^2} dt. \end{aligned}$$

Подставим найденные x и dx в интеграл: $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} =$

$$\begin{aligned} \int \frac{2t^2 + 2t + 2}{t(1 + 2t)^2} dt &= \left[\text{правильная рациональная дробь, разложение на простейшие} \right] = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{(1 + 2t)^2} - \frac{3}{1 + 2t} \right) dt = 2 \ln |t| - \\ - \frac{3}{2} \ln |1 + 2t| + \frac{3}{2} \frac{1}{1 + 2t} + C, \quad t &= x + \sqrt{x^2 + x + 1}. \end{aligned}$$

Пример 9.59. Вычислить $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Решение. Поскольку $c = 1 > 0$, то проведем вторую подстановку Эйлера $\sqrt{x^2 + x + 1} = \pm xt \pm 1$. Глядя на подынтегральное выражение, ничего нельзя сказать о конкретной подстановке. Поэтому выберем, например, такую:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = xt + 1.$$

Осуществим замену: $\sqrt{x^2 + x + 1} = xt + 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = x^2t^2 + 2xt + 1 \Rightarrow x(x + 1) = x(xt^2 + 2t) \Rightarrow x + 1 = xt^2 + 2t \Rightarrow x = \frac{1 - 2t}{t^2 - 1} \Rightarrow dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(t^2 - 1)^2} dt$.

Подставим найденные x и dx в интеграл. Предварительно подсчитаем: $\sqrt{x^2 + x + 1} + x = t \frac{1 - 2t}{t^2 - 1} + 1 + \frac{1 - 2t}{t^2 - 1} = \frac{1 - 2t}{t^2 - 1}(t + 1) + 1 = \frac{1 - 2t}{t - 1} + 1 = \frac{-t}{t - 1}$. Тогда вычислим $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = - \int \frac{(2t^2 - 2t + 2)(t - 1)}{(t^2 - 1)^2 t} dt = -2 \int \frac{(t^2 - t + 1)}{(t + 1)^2(t - 1)t} dt =$
 $\left[\text{разложение на простейшие: } \frac{(t^2 - t + 1)}{(t + 1)^2(t - 1)t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t - 1} + \frac{C}{t + 1} + \frac{D}{(t + 1)^2} \right] = -2 \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1/4}{t - 1} + \frac{3/4}{t + 1} + \frac{3/2}{(t + 1)^2} \right) dt =$
 $2 \ln |t| - \frac{1}{2} \ln |t - 1| - \frac{3}{2} \ln |t + 1| + 3 \frac{1}{t + 1} + C, \quad t = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x}.$

Пример 9.60. Вычислить $\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx$.

Решение. Так как $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$, то проведем третью подстановку Эйлера: $\sqrt{x^2 + 3x + 2} = t(x + 1) \Rightarrow (x + 1)(x + 2) = t^2(x + 1)^2 \Rightarrow x + 2 = t^2(x + 1) \Rightarrow x = \frac{2 - t^2}{t^2 - 1} \Rightarrow dx = \frac{-2t dt}{(t^2 - 1)^2}$.

Далее вычислим

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} = t \left(\frac{2 - t^2}{t^2 - 1} + 1 \right) = \frac{t}{t^2 - 1},$$

$$x - \sqrt{x^2 + 3x + 2} = \frac{2 - t^2}{t^2 - 1} - \frac{t}{t^2 - 1} = \frac{2 - t^2 - t}{t^2 - 1},$$

$$x + \sqrt{x^2 + 3x + 2} = \frac{2 - t^2}{t^2 - 1} + \frac{t}{t^2 - 1} = \frac{2 - t^2 + t}{t^2 - 1}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx &= \int \frac{(2 - t^2 - t)(t^2 - 1)(-2t)}{(t^2 - 1)(t^2 - 1)^2(2 - t^2 + t)} dt = \\ &= -2 \int \frac{t(t^2 + t - 2)}{(t^2 - t - 2)(t^2 - 1)^2} dt = -2 \int \frac{t(t + 2)(t - 1)}{(t - 2)(t + 1)(t^2 - 1)^2} dt = \\ &= -2 \int \frac{t(t + 2)}{(t - 2)(t - 1)(t + 1)^3} dt = \left[\text{разложение на простейшие:} \right. \\ &\quad \frac{A}{(t + 1)^3} + \frac{B}{(t + 1)^2} + \frac{C}{t + 1} + \frac{D}{t - 1} + \frac{E}{t - 2} \left. \right] = -2 \int \left(\frac{-\frac{1}{6}}{(t + 1)^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\frac{5}{36}}{(t + 1)^2} + \frac{\frac{17}{216}}{t + 1} - \frac{\frac{3}{8}}{t - 1} + \frac{\frac{8}{27}}{t - 2} \right) dt = -\frac{1}{6} \frac{1}{(t + 1)^2} - \frac{5}{18} \frac{1}{t + 1} - \\ &\quad - \frac{17}{108} \ln |t + 1| + \frac{3}{4} \ln |t - 1| - \frac{16}{27} \ln |t - 2| + C, \quad t = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + 1} = \\ &\quad \sqrt{\frac{x + 2}{x + 1}}. \end{aligned}$$

Отметим, что в рассматриваемом примере $a = 1 > 0$ и $c = 2 > 0$, т. е. возможны все три подстановки Эйлера.

Упражнение 9.8. Вычислить неопределенные интегралы.

$$1. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}.$$

$$(\text{Ответ: } \ln \left| \frac{t - 1}{t} \right| - 2 \operatorname{arctg} t + C, \quad t = \frac{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}{x}).$$

$$2. \int \frac{dx}{(1 + \sqrt{x(1 + x)})^2}.$$

$$(\text{Ответ: } \frac{2(3 - 4t)}{5(1 - t - t^2)} +$$

$$+ \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + 2t + 1}{\sqrt{5} - 1 - 2t} \right| + C, \quad t = \sqrt{x(1 + x)} - x).$$

$$3. \int \frac{1 - \sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}} dx.$$

$$(\text{Ответ: } \ln|t^2 - 1| + C, \quad t = \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}).$$

$$4. \int \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x}{\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x} dx.$$

$$(\text{Ответ: } \frac{5}{18} \frac{1}{(1+t)} + \frac{1}{6(t+1)^2} + \frac{17}{108} \ln|t+1| - \frac{3}{4} \ln|t-1| + \\ + \frac{16}{27} \ln|t-2| + C, \quad t = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}{1+x}).$$

Замечание. Подстановки Эйлера часто приводят к громоздким выкладкам. Приведем некоторые примеры интегралов, которые можно вычислить без подстановок Эйлера.

Пример 9.61. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x}}$.

Решение. Выделим полный квадрат: $x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Тогда $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} = \ln \left| x + \frac{1}{2} + \right.$
 $\left. + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + C = \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x} \right| + C.$

Пример 9.62. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

Решение. Выделим полный квадрат: $1 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x + 1) = -(x + 1)^2 + 2 = 2 - (x + 1)^2$. Тогда $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2 - (x + 1)^2}} = \arcsin \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + C.$

Пример 9.63. Вычислить $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx.$

Решение. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = \left[\text{в числителе выделим производную квадратного трехчлена: } (x^2+x+1)' = 2x+1 \right] = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx =$
 $\frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}} +$
 $+\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} = \left[\int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} \right] = \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \ln(x +$
 $+\frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}) + C.$

Пример 9.64. Вычислить $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}} dx.$

Решение. $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}} dx = \int \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2-x^4}} dx = \left[x dx = \frac{1}{2} dx^2 \right] =$
 $\frac{1}{2} \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2-x^4}} dx^2 = \left[t = x^2 \right] = \frac{1}{2} \int \frac{1+t}{\sqrt{1+t-t^2}} dt = \left[(1 + \right.$
 $\left. + t - t^2)' = 1 - 2t \right] = -\frac{1}{4} \int \frac{-2t-2}{\sqrt{1+t-t^2}} dt = -\frac{1}{4} \int \frac{(1-2t)-3}{\sqrt{1+t-t^2}} dt =$
 $-\frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{1+t-t^2} dt + \frac{3}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{4} - (t-\frac{1}{2})^2}} = -\frac{1}{2} \sqrt{1+t-t^2} +$
 $+\frac{3}{4} \arcsin \frac{(t-\frac{1}{2})2}{\sqrt{5}} + C = -\frac{1}{2} \sqrt{1+t-t^2} + \frac{3}{4} \arcsin \frac{2t-1}{\sqrt{5}} + C =$
 $-\frac{1}{2} \sqrt{1+x^2-x^4} + \frac{3}{4} \arcsin \frac{2x^2-1}{\sqrt{5}} + C.$

Пример 9.65. Вычислить $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$

Решение. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \left[\text{вынесем } x \text{ из-под корня} \right] =$
 $\int \frac{dx}{x \cdot |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \left[\text{далее будем считать } x > 0, \text{ а ес-} \right.$

$$\begin{aligned}
& \text{ли } x < 0, \text{ то результат будет отличаться только знаком} \Big] = \\
& \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \left[\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right) \right] = - \int \frac{d(1/x)}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \\
& \left[t = \frac{1}{x} \right] = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t + 1}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} = - \ln \left| t + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 + t + 1} \right| + C = - \ln \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} \right| + C = \\
& - \ln \left| \frac{x + 2 + 2\sqrt{1 + x + x^2}}{x} \right| + C.
\end{aligned}$$

Пример 9.66. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + x - 1}}$.

$$\begin{aligned}
& \text{Решение.} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + x - 1}} = \left[\text{из-под корня вынесем } x, \right. \\
& \left. x > 0 \right] = \int \frac{dx}{x \cdot x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}} = \left[\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right) \right] = - \int \frac{1}{x} \times \\
& \times \frac{d(1/x)}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}} = \left[t = \frac{1}{x} \right] = - \int \frac{t dt}{\sqrt{1 + t - t^2}} = \left[(1 + t - t^2)' = 1 - \right. \\
& \left. - 2t \right] = \frac{1}{2} \int \frac{(1 - 2t) - 1}{\sqrt{1 + t - t^2}} dt = \sqrt{1 + t - t^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{4} - (t - \frac{1}{2})^2}} = \\
& \sqrt{1 + t - t^2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2t - 1}{\sqrt{5}} + C, \quad t = 1/x.
\end{aligned}$$

Замечание. Интегралы примеров 9.65 и 9.66 можно решить, сделав замену $t = 1/x$.

Пример 9.67. Вычислить $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

$$\begin{aligned}
& \text{Решение.} \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} = \left[\text{положим } x-1 = t, \quad x = 1 + \right. \\
& \left. + t, \quad dx = dt, \quad x^2 - 2 = (t+1)^2 - 2 = t^2 + 2t - 1 \right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 + 2t - 1}},
\end{aligned}$$

а далее аналогично решению примера 9.65 произведем замену переменных, полагая $\frac{1}{x-1} = t \Rightarrow x-1 = \frac{1}{t}, x = \frac{1}{t} + 1 \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}, x^2 - 2 = \left(\frac{1}{t} + 1\right)^2 - 2 = \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда} \quad \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} &= - \int \frac{t \, dt}{t^2 \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} - 1}} = \\ &= - \int \frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{2-(t-1)^2}} = - \arcsin \frac{t-1}{\sqrt{2}} + C, \\ t &= \frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$

Пример 9.68. Вычислить $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$.

Решение. Для вычисления интеграла используем формулу интегрирования по частям: $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx =$

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 - x^2}, \, dv = dx, \\ du = \frac{-x \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \, v = x \end{array} \right] &= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx + \\ &+ a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin \frac{x}{|a|}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Отсюда получим} \quad I &= \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \\ &+ \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} + C. \end{aligned}$$

Пример 9.69. Вычислить $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \, dx$.

$$\begin{aligned} \text{Решение.} \quad I &= \int \sqrt{x^2 \pm a^2} \, dx = \\ \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{x^2 \pm a^2}, \, dv = dx, \\ du = \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, dx, \, v = x \end{array} \right] &= x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \int \frac{(x^2 \pm a^2) \mp a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx &= x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx \mp \\
 \mp \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx &= x\sqrt{x^2 \pm a^2} - I \mp a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|.
 \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } I = \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2 \pm a^2}}{2} \mp \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

Пример 9.70. Вычислить $\int \sqrt{2+x-x^2} dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{Решение. } \int \sqrt{2+x-x^2} dx &= \int \sqrt{2+x-x^2} = \frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \Big] = \int \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} dx = \left[\text{см. результат приме-} \right. \\
 \text{ра 9.68} \Big] &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \arcsin \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} + C = \\
 &= \frac{(2x-1)\sqrt{2+x-x^2}}{4} + \frac{9}{8} \arcsin \frac{2x-1}{3} + C.
 \end{aligned}$$

На основании решений примеров 9.68 и 9.69 дополним таблицу неопределенных интегралов следующими интегралами.

$$24. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} + C.$$

$$25. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2 \pm a^2}}{2} \mp \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

Упражнение 9.9. Вычислить неопределенные интегралы.

$$1. \int \frac{x dx}{\sqrt{5+x-x^2}}.$$

$$(\text{Ответ: } -\sqrt{5+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{21}} + C).$$

$$2. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}.$$

$$(\text{Ответ: } \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x^2+3}{\sqrt{17}} + C).$$

$$3. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$(\text{Ответ: } -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x} \right| + C).$$

$$4. \int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}.$$

$$(\text{Ответ: } \frac{1}{5} \frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{x+2} + \frac{1}{5\sqrt{5}} \arcsin \frac{(x+7)}{(x+2)\sqrt{6}} + C).$$

$$5. \int \sqrt{x^4+2x^2-1} \cdot x \, dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{x^2+1}{4} \sqrt{x^4+2x^2-1} - \frac{1}{2} \ln \left| x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2-1} \right| + C).$$

9.4.3. Интегрирование биномиальных дифференциалов. Подстановки Чебышева

Биномиальным дифференциалом называется выражение вида

$$x^m(a+bx^n)^p dx,$$

где числа m, n, p рациональные, $a, b \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$.

Интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ рационализуется только в трех случаях:

1) p целое, замена $x = t^r$, где r наименьшее общее кратное знаменателей m и n ;

2) $\frac{m+1}{n}$ целое, замена $a+bx^n = t^l$, где l знаменатель дроби p ;

3) $\frac{m+1}{n} + p$ целое, замена $\frac{a+bx^n}{x^n} = t^l$, где l знаменатель дроби p .

Пример 9.71. Вычислить $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}.$

Решение. Подынтегральную функцию запишем в виде $\frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} = x^{1/2}(1 + x^{1/3})^{-2}$. В этом случае $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = -2$. Так как $p = -2$ — целое, то проходит первая подстановка Чебышева. В этом случае $r = 2 \cdot 3 = 6$.

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } I &= \int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx = \int x^{1/2}(1 + x^{1/3})^{-2} dx = \\ &= \left[x = t^6, \quad dx = 6t^5 dt \Rightarrow x^{1/2} = t^3, \quad x^{1/3} = t^2 \right] = \int t^3(1 + \\ &+ t^2)^{-2} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{(1 + t^2)^2} dt = \left[\text{дробь неправильная, выде-} \right. \\ &\left. \text{лим целую часть} \right] = 6 \int \left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2 + 3}{(1 + t^2)^2} \right) dt = 6 \left(\frac{t^5}{5} - \right. \\ &- \frac{2}{3}t^3 + 3t - \int \frac{(3t^2 + 3) + t^2}{(1 + t^2)^2} dt \Big) = 6 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2}{3}t^3 + 3t - 3 \int \frac{dt}{1 + t^2} - \right. \\ &- \left. \int \frac{t^2}{(1 + t^2)^2} dt \right) = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 18 \operatorname{arctg} t - 6I_1. \end{aligned}$$

Интеграл $I_1 = \int \frac{t^2}{(1 + t^2)^2} dt$ вычисляется с помощью формулы интегрирования по частям (см. п. 9.2.4, пример 9.48):

$$I_1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + t^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C_1.$$

$$\begin{aligned} \text{Таким образом, } I &= \int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - \\ &- 18 \operatorname{arctg} t + 3 \frac{t}{1 + t^2} - 3 \operatorname{arctg} t + C = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 21 \operatorname{arctg} t + \\ &+ \frac{3t}{1 + t^2} + C, \text{ где } t = \sqrt[6]{x}. \end{aligned}$$

Пример 9.72. Вычислить $\int \frac{x}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} dx$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int \frac{x}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} dx &= \int x(1 + x^{2/3})^{-1/2} dx = \left[m = \right. \\ 1, \quad n &= \frac{2}{3}, \quad p = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m+1}{n} = \frac{1+1}{2/3} = 3 \quad \text{целое, подходит} \end{aligned}$$

вторая подстановка Чебышева: $1 + x^{2/3} = t^2 \Rightarrow x^{2/3} = t^2 - 1$
 $\Rightarrow x = (t^2 - 1)^{3/2} \Rightarrow dx = \frac{3}{2}(t^2 - 1)^{1/2} \cdot 2t dt = 3t(t^2 - 1)^{1/2} dt =$
 $\int (t^2 - 1)^{3/2} t^{-1} \cdot 3t(t^2 - 1)^{1/2} dt = 3 \int (t^2 - 1)^2 dt = 3 \int (t^4 - 2t^2 +$
 $+ 1) = 3 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2}{3} t^3 + t \right) + C = \frac{3}{5} t^5 - 2t^3 + 3t + C$, где $t = \sqrt{1 + x^{2/3}}$.

Пример 9.73. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \int x^0 (1+x^3)^{-1/3} dx = \left[m = 0, \right.$
 $n = 3, p = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ целое $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{1+x^3}{x^3} = t^3 \Rightarrow \frac{1}{x^3} + 1 = t^3 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{t^3 - 1} = (t^3 -$
 $- 1)^{-1} \Rightarrow x = (t^3 - 1)^{-1/3} \Rightarrow dx = -\frac{1}{3}(t^3 - 1)^{-4/3} \cdot 3t^2 dt =$
 $-t^2(t^3 - 1)^{-4/3} dt; 1 + x^3 = 1 + \frac{1}{t^3 - 1} = \frac{t^3}{t^3 - 1} \Big] =$
 $-\int t^2(t^3 - 1)^{-4/3} \left(\frac{t^3}{t^3 - 1} \right)^{-1/3} dt = -\int \frac{t^2(t^3 - 1)^{-4/3} t^{-1}}{(t^3 - 1)^{-1/3}} dt =$
 $-\int \frac{t}{t^3 - 1} dt = -\int \frac{t}{(t-1)(t^2+t+1)} dt = \left[\text{разложение на}

простейшие: $\frac{A}{t-1} + \frac{Bt+D}{t^2+t+1} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, D = \frac{1}{3} \Big] =$
 $-\int \left(\frac{\frac{1}{3}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{3}t + \frac{1}{3}}{t^2+t+1} \right) dt = -\frac{1}{3} \ln|t-1| + \frac{1}{3} \int \frac{t-1}{t^2+t+1} dt =$
 $\left[(t^2+t+1)' = 2t+1 \right] = -\frac{1}{3} \ln|t-1| + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2t-2}{t^2+t+1} dt =$
 $-\frac{1}{3} \ln|t-1| + \frac{1}{6} \int \left(\frac{2t+1}{t^2+t+1} - \frac{3}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right) dt = -\frac{1}{3} \ln|t-$
 $-1| + \frac{1}{6} \ln(t^2+t+1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}/2} \operatorname{arctg} \frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2} + C = -\frac{1}{3} \ln|t-1| +$
 $+ \frac{1}{6} \ln(t^2+t+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$, где $t = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.$

Упражнение 9.10. Вычислить неопределенные интегралы.

$$1. \int \sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x^2})^2 dx.$$

$$(\text{Ответ: } \frac{2}{3}t^9 + \frac{12}{13}t^{13} + \frac{6}{17}t^{17} + C, \quad t = x^{1/6}).$$

$$2. \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (\text{Ответ: } -t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C, \quad t = \sqrt{1-x^2}).$$

$$3. \int x^{-3}(1+x^{-1})^{-1/5} dx.$$

$$(\text{Ответ: } \frac{5}{4}t^4 - \frac{5}{9}t^9 + C, \quad t = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/5}).$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

$$(\text{Ответ: } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C, \quad t = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}).$$

$$5. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{3}{7}t^4(4t^3-7) + C, \quad t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}).$$

$$6. \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{5} \ln |t-1| - \frac{1}{10} \ln(t^2+t+1) + \\ + \frac{\sqrt{3}}{5} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, \quad t = \sqrt[3]{1+x^5}).$$

9.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНО-ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

9.5.1. Интегрирование выражений вида $R(\sin x, \cos x)$

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где $R(\sin x, \cos x)$ — рациональная функция переменных $\sin x$ и $\cos x$, всегда могут быть рационализированы подстановкой $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ($-\pi < x < \pi$).

Действительно,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}.$$

Следовательно,

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right) \frac{2 dt}{1 + t^2}.$$

Указанную подстановку называют *универсальной*.

Пример 9.74. Вычислить $\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x - 5}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{3 \sin x + 4 \cos x - 5} = R(\sin x, \cos x)$. Применим подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ($-\pi < x < \pi$).

Получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x - 5} &= \int \frac{2 dt}{\left(3 \frac{2t}{1+t^2} + 4 \frac{1-t^2}{1+t^2} - 5\right)(1+t^2)} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{6t + 4(1-t^2) + 5(1+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2 \int \frac{dt}{(t+3)^2} = \\ &= -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3} + C. \end{aligned}$$

Универсальная подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ часто приводит к громоздким вычислениям, поэтому прибегать к ней следует только в том случае, если не видно других путей вычисления интеграла.

Во многих случаях для вычисления $\int R(\sin x, \cos x) dx$ удобно применять специальные подстановки.

1. Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ является нечетной относительно $\sin x$, т.е.

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то подстановка $t = \cos x$, $x \in (-\pi/2; \pi/2)$.

2. Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ является нечетной относительно $\cos x$, т.е.

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то подстановка $t = \sin x$, $x \in (0; \pi)$.

3. Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ удовлетворяет соотношению

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то подстановка $t = \operatorname{tg} x$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$). При этом

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = dt, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Пример 9.75. Вычислить $\int \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{\sin^2 x \cos x + 9 \cos^3 x} dx$.

Решение. Проверим, какую подстановку можно применить:

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{\sin^2 x \cos x + 9 \cos^3 x};$$

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{-2 \sin x + 3 \cos x}{\sin^2 x \cos x + 9 \cos^3 x} \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(\sin x; -\cos x) = \frac{2 \sin x - 3 \cos x}{-\sin^2 x \cos x - 9 \cos^3 x} \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(-\sin x; -\cos x) = \frac{-2 \sin x - 3 \cos x}{-\sin^2 x \cos x - 9 \cos^3 x} = R(\sin x, \cos x).$$

Следовательно, применим подстановку $t = \operatorname{tg} x$ из п. 3:

$$\int \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{\sin^2 x \cos x + 9 \cos^3 x} dx = \left[\text{разделим числитель и знаменатель} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{на } \cos^3 x] &= \int \frac{(2 \operatorname{tg} x + 3)}{(\operatorname{tg}^2 x + 9) \cos^2 x} dx = \int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\operatorname{tg}^2 x + 9} d \operatorname{tg} x = \\ &= [t = \operatorname{tg} x] = \int \frac{2t + 3}{t^2 + 9} dt = \ln(\operatorname{tg}^2 x + 9) + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{3} + C. \end{aligned}$$

Пример 9.76. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$.

Решение.

Первый способ. $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin x \cos^2 x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow R(-\sin x, \cos x) = \frac{-1}{\sin x \cos^2 x} = -R(\sin x, \cos x).$$

Это означает, что подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$. Применим подстановку $t = \cos x$.

Так как известна подстановка $t = \cos x$, то умножим числитель и знаменатель на $\sin x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} &= \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = - \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x (1 - \cos^2 x)} = \\ &= - \int \frac{dt}{t^2 (1 - t^2)} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| + \frac{1}{\cos x} + C. \end{aligned}$$

Второй способ. Используя тождество $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^2 x} dx = \left[\text{разделим почленно} \right] = \\ &= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{dx}{\sin x} = - \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x} + \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{1}{\cos x} - \int \frac{d \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| + C. \end{aligned}$$

Заметим, что проверка подынтегральной функции на четность или нечетность относительно $\sin x$, $\cos x$ дает некоторую подсказку для интегрирования тригонометрических функций, причем не обязательно рациональных.

Пример 9.77. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}}$.

Решение. Легко убедиться, что подынтегральная функция является нечетной относительно $\sin x$, относительно $\cos x$ и четной относительно $\sin x$ и $\cos x$ одновременно. Применим подстановку $t = \operatorname{tg} x$, но предварительно преобразуем подынтегральную функцию:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}} &= \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} \cos^6 x}} = \int \frac{dx}{\cos^2 x \operatorname{tg}^{5/3} x} = \\ &= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^{5/3} x} = -\frac{3}{2} \operatorname{tg}^{-2/3} x + C = -\frac{3}{2} \frac{1}{\operatorname{tg}^{2/3} x} + C. \end{aligned}$$

Замечание. Интегралы вида $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$ всегда можно свести к интегралам от рациональных функций

$$2 \int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right) \frac{dt}{1-t^2}$$

с помощью гиперболической подстановки $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$. Иногда удобнее использовать подстановки $t = \operatorname{sh} x$, $t = \operatorname{ch} x$, $t = \operatorname{th} x$.

Пример 9.78. Вычислить $\int \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh}^8 x dx$.

Решение. Подынтегральная функция обладает свойством

$$R(\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x).$$

Поэтому применим подстановку $t = \operatorname{sh} x$: $\int \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh}^8 x dx = \int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^8 x \operatorname{ch} x dx = \int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^8 x d(\operatorname{sh} x) = \left[\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{ch}^2 x = \operatorname{sh}^2 x + 1 \right] = \int (\operatorname{sh}^2 x + 1) \operatorname{sh}^8 x d(\operatorname{sh} x) = \left[t = \operatorname{sh} x \right] = \int (t^2 + 1)t^8 dt = \int (t^8 + t^{10}) dt = \frac{1}{9}t^9 + \frac{1}{11}t^{11} + C = \frac{1}{9} \operatorname{sh}^9 x + \frac{1}{11} \operatorname{sh}^{11} x + C.$

Пример 9.79. Вычислить $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} 2x dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} 2x = \left[\operatorname{ch} 2x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 \right] = \operatorname{sh}^3 x (2 \operatorname{ch}^2 x - 1).$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } \int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} 2x dx &= \int \operatorname{sh}^3 x (2 \operatorname{ch}^2 x - 1) dx = \\ &= \left[\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1 \right] = \int \operatorname{sh}^2 x (2 \operatorname{ch}^2 x - \\ &- 1) \operatorname{sh} x dx = \int (\operatorname{ch}^2 x - 1)(2 \operatorname{ch}^2 x - 1) d(\operatorname{ch} x) = \int (2 \operatorname{ch}^4 x - 3 \operatorname{ch}^2 x + \\ &+ 1) d(\operatorname{ch} x) = \frac{2}{5} \operatorname{ch}^5 x - \operatorname{ch}^3 x + \operatorname{ch} x + C. \end{aligned}$$

Пример 9.80. Вычислить $\int \operatorname{th}^3 x dx$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int \operatorname{th}^3 x dx &= \int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^3 x} dx = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} dx = \\ &= \int \frac{(\operatorname{ch}^2 x - 1)}{\operatorname{ch}^3 x} d(\operatorname{ch} x) = \int \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} - \frac{1}{\operatorname{ch}^3 x} \right) d(\operatorname{ch} x) = \ln \operatorname{ch} x + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + C. \end{aligned}$$

Пример 9.81. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int \frac{dx}{\sin^4 x} &= \int \frac{1}{\sin^2 x} \frac{dx}{\sin^2 x} = \left[\frac{1}{\sin^2 x} = \right. \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x \left. \right] = - \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) d(\operatorname{ctg} x) = \\ &= - \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C. \end{aligned}$$

Отметим, что поскольку $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, то для вычисления $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$ можно переходить к функциям e^x и e^{-x} .

Пример 9.82. Вычислить $\int \frac{\operatorname{ch} 2x + \operatorname{sh} 2x}{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + 1)} dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\begin{aligned} & \int \frac{\operatorname{ch} 2x + \operatorname{sh} 2x}{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + 1)} dx = \\ &= \left[\operatorname{ch} 2x + \operatorname{sh} 2x = e^{2x}, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \right] = \\ &= \int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx = \int \frac{e^x e^x dx}{1 + e^x} = \int \frac{e^x de^x}{e^x + 1} = [e^x = t] = \int \frac{t dt}{t + 1} = \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{t + 1} \right) dt = t - \ln |t + 1| + C = e^x - \ln(e^x + 1) + C. \end{aligned}$$

9.5.2. Интегрирование выражений вида $\sin^m x \cos^n x$

Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m и n — целые числа, вычисляются с помощью искусственных преобразований или применением формул понижения.

В частности, если $m, n \in \mathbb{N}$ и при этом:

1) если m — четное, а n — нечетное, то один $\cos x$ подносится под знак дифференциала, а оставшийся $\cos x$ в четной степени выражается через $\sin x$;

2) если m — нечетное, а n — четное, то один $\sin x$ подносится под знак дифференциала, а оставшийся $\sin x$ в четной степени выражается через $\cos x$;

3) если m и n — четные, то применяются формулы понижения

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Пример 9.83. Вычислить $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$.

Решение.

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) = \int \sin^4 x (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x) = \\
&= \int (\sin^4 x - 2\sin^6 x + \sin^8 x) d(\sin x) = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C.
\end{aligned}$$

Пример 9.84. Вычислить $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \\
&= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2 dx = \\
&= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)(1 + \cos 2x) dx = \\
&= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx + \\
&+ \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) + \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx = \\
&= \frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + C.
\end{aligned}$$

Пример 9.85. Вычислить $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x}$.

Решение. Подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$, следовательно, подстановка $t = \cos x$. Для вычисления интеграла преобразуем подынтегральное выражение к функции, зависящей только от $\cos x$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x} &= - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^4 x} d(\cos x) = \\
&= - \int \left(\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) d(\cos x) = \frac{1}{3} \frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.
\end{aligned}$$

9.5.3. Интегрирование выражений вида

$$\sin ax \cos bx, \quad \sin ax \sin bx, \quad \cos ax \cos bx$$

Интегралы вида $\int \sin ax \cos bx \, dx$, $\int \sin ax \sin bx \, dx$, $\int \cos ax \cos bx \, dx$ вычисляются с использованием формул

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

Пример 9.86. Вычислить $\int \sin 2x \cos 4x \, dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \sin 2x \cos 4x \, dx &= \frac{1}{2} \int (\sin(-2x) + \sin 6x) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int (-\sin 2x + \sin 6x) \, dx = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{12} \cos 6x + C. \end{aligned}$$

Упражнение 9.11. Вычислить неопределенный интеграл.

1. $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$. (Ответ: $-\frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C$).

2. $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$. (Ответ: $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C$).

3. $\int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}$. (Ответ: $\frac{1}{6} \ln(1 - \cos x) +$
 $+ \frac{1}{3} \ln(2 + \cos x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos x) + C$).

$$4. \int \sin^5 x \cos^5 x dx.$$

$$(\text{Ответ: } -\frac{\cos 2x}{64} + \frac{\cos^3 2x}{96} - \frac{\cos^5 2x}{320} + C).$$

$$5. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}. \quad (\text{Ответ: } -8 \operatorname{ctg} 2x - \frac{8}{3} \operatorname{ctg}^3 2x + C).$$

$$6. \int \cos x \cos 2x \cos 3x dx.$$

$$(\text{Ответ: } \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{24} \sin 6x + C).$$

Задачи для индивидуальных и контрольных заданий

9.1. Вычислить неопределенный интеграл с помощью внесения функции под знак дифференциала.

$$1. \int \frac{(\sqrt{x} + x)^3}{x^2} dx. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{x} + 3x + 2x^{3/2} + \frac{1}{2}x^2 + C).$$

$$2. \int \frac{\ln^2 x}{x} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{3} \ln^3 x + C).$$

$$3. \int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx. \quad (\text{Ответ: } \operatorname{arctg}(\sin x) + C).$$

$$4. \int \frac{x^3}{x^4 + 4} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{4} \ln(x^4 + 4) + C).$$

$$5. \int \frac{x}{x^4 + 4} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + C).$$

$$6. \int \frac{(\operatorname{tg}^2 x + 1)}{\cos^2 x} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + C).$$

$$7. \int \frac{e^x}{e^x + 4} dx. \quad (\text{Ответ: } \ln(e^x + 4) + C).$$

$$8. \int \frac{e^x}{e^{2x} + 4} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{2} + C).$$

$$9. \int \frac{\sin x}{1 - \cos x} dx. \quad (\text{Ответ: } \ln |1 - \cos x| + C).$$

10. $\int \frac{x^2 + \ln^4 x + xe^x}{x} dx.$ (Ответ: $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} \ln^5 x + e^x + C$).
11. $\int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x + 1) \cos^2 x}.$ (Ответ: $\ln |\operatorname{tg} x + 1| + C$).
12. $\int \frac{dx}{(\operatorname{ctg}^2 x + 1) \sin^2 x}.$ (Ответ: $-\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) + C$).
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^2 x}.$ (Ответ: $-\frac{1}{\arcsin x} + C$).
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2})}.$ (Ответ: $\ln |\ln(x + \sqrt{1+x^2})| + C$).
15. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} + 1}{\sqrt{x}} dx.$ (Ответ: $2e^{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + C$).
16. $\int \frac{e^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx.$ (Ответ: $-e^{\operatorname{ctg} x} + C$).
17. $\int \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}.$ (Ответ: $-\sin \frac{1}{x} + C$).
18. $\int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx.$ (Ответ: $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$).
19. $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$ (Ответ: $\operatorname{arctg}^2 \sqrt{x} + C$).
20. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx.$ (Ответ: $2\sqrt{e^x + 1} + C$).
21. $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x + 1} dx.$ (Ответ: $\operatorname{arctg} \operatorname{ch} x + C$).
22. $\int \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} dx.$ (Ответ: $\frac{1}{2} \operatorname{th}^2 x + \frac{1}{3} \operatorname{th}^3 x + C$).

9.2. Вычислить неопределенный интеграл от иррациональных функций.

1. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx.$
(Ответ: $\sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right| + C$).
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}.$ (Ответ: $\ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2+3x+2} \right| + C$).

$$3. \int \frac{\ln x}{x\sqrt{3+2\ln x+4\ln^2 x}} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{4}\sqrt{4t^2+2t+3} - \frac{1}{8}\ln\left|2t+\frac{1}{2}+\sqrt{4t^2+2t+3}\right| + C, \text{ где } t = \ln x).$$

$$4. \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx. \quad (\text{Ответ: } \sqrt{x^2+2x+3} + \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}| + C).$$

$$5. \int \frac{(2x+3)}{\sqrt{1-2x+4x^2}} dx. \quad (\text{Ответ: } \sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}} + \frac{7}{4}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}\right| + C).$$

$$6. \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-x^2}}. \quad (\text{Ответ: } -\operatorname{sgn}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2-x}{x}} + C).$$

$$7. \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx. \quad (\text{Ответ: } -\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2} + C).$$

$$8. \int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}} \frac{dx}{2x+1}. \quad (\text{Ответ: } -t + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t+1}{\sqrt{2}t-1}\right| + C, \text{ где } t = \sqrt{\frac{x+1}{2x+1}}).$$

$$9. \int \frac{x^2+4}{x^2\sqrt{x^2+1}} dx. \quad (\text{Ответ: } \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - 4\operatorname{sgn}\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C).$$

$$10. \int \frac{1+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(4-x)} dx. \quad (\text{Ответ: } 2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2} - 4\sqrt{4-x} + C).$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-1}}. \quad (\text{Ответ: } \operatorname{sgn}\frac{1}{x}\sqrt{4-\frac{1}{x^2}} + C).$$

$$12. \int \frac{4x+7}{\sqrt{4x^2+7}} dx. \quad (\text{Ответ: } \sqrt{4x^2+7} + \frac{7}{2}\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+7}\right) + C).$$

$$13. \int \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}} dx. \text{ (Ответ: } -\sqrt{2ax - x^2} + a \arcsin \frac{x-a}{x} + C \\ \text{или } -\sqrt{2ax - x^2} + 2a \arcsin \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}} + C).$$

$$14. \int \frac{x+1}{\sqrt{x}+1} dx. \\ \text{(Ответ: } \frac{2}{3}x^{3/2} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln(\sqrt{x}+1) + C).$$

$$15. \int \frac{2 + \ln x}{x\sqrt{1 - 4\ln x - \ln^2 x}} dx. \\ \text{(Ответ: } -\sqrt{1 - 4\ln x - \ln^2 x} + C).$$

$$16. \int \frac{1 - x + x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}} dx. \text{ (Ответ: } -\ln \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} \right| - \\ - \sqrt{1+x-x^2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C).$$

9.3. Вычислить интегралы от трансцендентных функций.

$$1. \int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{\operatorname{ch} x} dx. \\ \text{(Ответ: } \operatorname{arctg}^2 e^x + C).$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4e^x + e^{2x}}}. \\ \text{(Ответ: } -\ln(e^{-x} + 2 + \sqrt{e^{-2x} + 4e^{-x} + 1}) + C).$$

$$3. \int \operatorname{ch}^3 x dx. \\ \text{(Ответ: } \operatorname{sh} x + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x + C).$$

$$4. \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx. \\ \text{(Ответ: } \frac{1}{32}\operatorname{sh} 4x - \frac{1}{8}x + C).$$

9.4. Вычислить неопределенные интегралы от рациональных функций.

$$1. \int \frac{dx}{(x+2)(4x^2+8x+7)}. \\ \text{(Ответ: } \frac{1}{7} \ln|x+2| - \\ - \frac{1}{14} \ln(4x^2+8x+7) + \frac{2}{7\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+2}{\sqrt{3}} + C).$$

2. $\int \frac{(x+2)}{(x+1)(x^2+x+1)} dx.$
(Ответ: $\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$).
3. $\int \frac{6x^2-9x-1}{(x-1)(x^2+x+2)} dx.$
(Ответ: $-\ln|x-1| + \frac{7}{2}\ln(x^2+x+2) - \frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C$).
4. $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x+3)(x^2+x+1)} dx.$ (Ответ: $x - \frac{18}{7}\ln|x+3| - \frac{3}{14}\ln(x^2+x+1) + \frac{15}{7\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$).
5. $\int \frac{x^2-2x-5}{x^3-x^2+2x-2} dx.$
(Ответ: $-2\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$).
6. $\int \frac{3x^3-x^2+5x+1}{(3+x^2)(1-x^2)} dx.$
(Ответ: $-\frac{1}{2}\ln(x^2+3) - \ln|1-x^2| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C$).
7. $\int \frac{10x^2-x-6}{2x^3-x+1} dx.$
(Ответ: $\ln|x+1| + 2\ln(x^2-x+\frac{1}{2}) - 3\operatorname{arctg}(2x-1) + C$).
8. $\int \frac{x^3-4x^2+14x-17}{(x-1)^2(x^2-2x+4)} dx.$ (Ответ: $3\ln|x-1| + \frac{2}{x-1} - \ln(x^2-2x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$).
9. $\int \frac{2x^3+5x^2+22x-20}{(x-2)(x^2+4x+8)} dx.$
(Ответ: $2x + 3\ln|x-2| - \ln(x^2+4x+8) + 5\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C$).
10. $\int \frac{4x^3-11x^2+24x-18}{x^4-4x^3+6x^2} dx.$
(Ответ: $2\ln|x| + \frac{3}{x} + \ln(x^2-4x+6) + 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{2}} + C$).

11. $\int \frac{6x^3 + 21x^2 + 21x + 15}{(x^2 + 2x + 1)(2x^2 + 2x + 3)} dx.$ (ОТВЕТ: $\ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + \ln(2x^2 + 2x + 3) + \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C$).
12. $\int \frac{10x^3 + 43x^2 + 60x + 34}{(x^2 + 4x + 4)(x^2 + 2x + 3)} dx.$ (ОТВЕТ: $4 \ln|x+2| - \frac{2}{x+2} + 3 \ln(x^2 + 2x + 3) - \frac{5}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$).
13. $\int \frac{4x^3 + 24x^2 + 20x - 28}{(x+3)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$
(ОТВЕТ: $-\frac{4}{x+3} + 2 \ln(x^2 + 2x + 2) - 8 \operatorname{arctg}(x+1) + C$).
14. $\int \frac{5x^3 + 2x^2 + x - 36}{(x+1)^2(x^2 - 2x + 5)} dx.$
(ОТВЕТ: $\frac{5}{x+1} - \ln|x+1| + 3 \ln(x^2 - 2x + 5) + C$).
15. $\int \frac{3x^5}{(x^6 + 1)(x^3 - 8)} dx.$
(ОТВЕТ: $\frac{8}{65} \ln|x^3 - 8| - \frac{4}{65} \ln(x^6 + 1) + \frac{1}{65} \operatorname{arctg} x^3 + C$).
16. $\int \frac{dx}{x^3 + 1}.$
(ОТВЕТ: $\frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$).
17. $\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}.$
(ОТВЕТ: $\frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$).
18. $\int \frac{x}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$
(ОТВЕТ: $-\frac{x+2}{3(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$).
19. $\int \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx.$ (ОТВЕТ: $-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 1} + C$).
20. $\int \frac{x}{x^4 + x^2 + 1} dx.$ (ОТВЕТ: $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{3}} + C$).

$$21. \int \frac{x^3 + x}{x^4 - x^2 + 1} dx.$$

(Ответ: $\frac{1}{4} \ln(x^4 + x^2 + 1) + \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{3}} + C$).

9.5. Вычислить неопределенные интегралы с помощью интегрирования по частям.

$$1. \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx. \quad (\text{Ответ: } x \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C).$$

$$2. \int \frac{\ln(5+x)}{\sqrt{5+x}} dx. \quad (\text{Ответ: } 2\sqrt{5+x} \ln(5+x) - 4\sqrt{5+x} + C).$$

$$3. \int x^2 \ln(1+x) dx.$$

$$(\text{Ответ: } \frac{1}{3}(x^3 + 1) \ln(x+1) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + C).$$

$$4. \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx. \quad (\text{Ответ: } -\frac{\arcsin x}{x} - \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right) + C).$$

$$5. \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx. \quad (\text{Ответ: } -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+1}{x^2} + C).$$

$$6. \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx.$$

$$(\text{Ответ: } 2\sqrt{x+1} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + C).$$

$$7. \int \frac{\ln(5x+7)}{\sqrt{5x+7}} dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{2}{5} \sqrt{5x+7} (\ln(5x+7) - 2) + C).$$

$$8. \int \frac{\ln(2x^2+3)}{x^3} dx.$$

$$(\text{Ответ: } -\frac{1}{2x^2} \ln(2x^2+3) + \frac{2}{3} \ln|x| - \frac{1}{3} \ln(2x^2+3) + C).$$

$$9. \int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) dx. \quad (\text{Ответ: } -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C).$$

$$10. \int x \sin^2 x dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{4} \sin^2 x + C).$$

$$11. \int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$(\text{Ответ: } x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C).$$

$$12. \int (x^2 + x)e^{-x} dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } -e^{-x}(x^2 + 3x + 3) + C).$$

$$13. \int \ln^2(x + \sqrt{1 + x^2}) dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } x \ln^2(x + \sqrt{1 + x^2}) - 2\sqrt{1 + x^2} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + 2x + C).$$

9.6. Выполнить интегрирование рационально-тригонометрических функций.

$$1. \int \frac{\sin 2x}{3 + 4 \sin^2 x} dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{1}{4} \ln(3 + 4 \sin^2 x) + C).$$

$$2. \int \frac{(2 + \sin^2 x) \sin x}{4 + \sin^2 x} dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } -\cos x - \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\cos x - \sqrt{5}}{\cos x + \sqrt{5}} \right| + C).$$

$$3. \int \frac{2x - 3 - \sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } -2\sqrt{1 - x^2} - 3 \arcsin x - \frac{3}{4} (\arcsin x)^{4/3} + C).$$

$$4. \int \frac{dx}{2 + 3 \sin 2x - 4 \cos^2 x}. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{\sqrt{13} - 3 - 2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{13} + 3 + 2 \operatorname{tg} x} \right| + C).$$

$$5. \int \frac{dx}{5 \cos^2 x + 4 \sin^2 x}. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C).$$

$$6. \int \frac{1 - \sin x}{3 - \cos x} dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}) - \ln(3 - \cos x) + C).$$

$$7. \int \frac{dx}{(3 + \sin x) \cos x}. \quad (\text{ОТВЕТ: } -\frac{1}{8} \ln(3 + \sin x) + \frac{1}{4} \ln(1 + \sin x) - \frac{1}{8} \ln(1 - \sin x) + C).$$

$$8. \int \frac{\sin x \cos x}{4 \sin^2 x + 3 \cos^2 x + 5} dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + 8) + C).$$

9. $\int \frac{dx}{3 + 2 \sin^2 x + 10 \sin x \cos x}$.
(Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{20} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2/5}}{\operatorname{tg} x + 1 + \sqrt{2/5}} \right| + C$).
10. $\int \frac{\operatorname{tg} x + 5}{\operatorname{tg} x - 8} dx$.
(Ответ: $\frac{1}{5} \ln |\operatorname{tg} x - 8| - \frac{1}{10} \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) - \frac{3}{5} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C$).
11. $\int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^3 x (3 + \operatorname{tg}^2 x)} dx$.
(Ответ: $-\frac{1}{6 \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{18} \ln(3 + \operatorname{tg}^2 x) - \frac{1}{9} \ln |\operatorname{tg} x| + C$).
12. $\int \frac{16 \operatorname{tg}^3 x - 4 \operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x - 7}{4 \operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 5} dx$.
(Ответ: $2 \ln(4t^2 + 4t + 5) - 3 \operatorname{arctg} t + C$, где $t = \operatorname{tg} x$).
13. $\int \frac{2 + \sin x}{4 - \cos x} dx$.
(Ответ: $\frac{4}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{7} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + \ln(4 - 3 \cos x) + C$).
14. $\int \cos^3 x \sin x \sqrt{\cos^2 x + 2 \sin^2 x} dx$.
(Ответ: $-\frac{1}{5}(2 - t)^{5/2} + \frac{2}{3}(2 - t)^{3/2} + C$, где $t = \cos^2 x$).
15. $\int \frac{5 \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x + 20}{(\operatorname{tg} x - 2)(\operatorname{tg}^2 x + 4)} \frac{dx}{\cos^2 x}$.
(Ответ: $3 \ln |\operatorname{tg} x - 2| + \ln(\operatorname{tg}^2 x + 4) - 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{2} + C$).
16. $\int \frac{dx}{5 + \sin x + 3 \cos x}$. (Ответ: $\frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{15}} + C$).
17. $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{2 + \sin^2 x} dx$.
(Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{2} + \frac{1}{6} \ln(3 \operatorname{tg}^2 x + 2) + C$).
18. $\int \frac{2x - 1 - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.
(Ответ: $-2\sqrt{1 - x^2} - \arcsin x - \frac{2}{3} \arcsin^{3/2} x + C$).

19. $\int \frac{dx}{5 + \sin^2 x}$. (Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{30}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5}{6}} \operatorname{ctg} x + C$).
20. $\int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx$.
(Ответ: $\ln(2 + \operatorname{tg}^2 x) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C$).
21. $\int \frac{dx}{(1 - \operatorname{tg} x) \sin^2 x}$. (Ответ: $-(\operatorname{ctg} x + \ln |\operatorname{ctg} x - 1|) + C$).
22. $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$. (Ответ: $\frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x| + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + C$).
23. $\int \frac{dx}{2 + \sin x}$. (Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t + 1}{\sqrt{3}} + C$, где $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$).
24. $\int (\sqrt{\sin x} + \cos x)^2 dx$.
(Ответ: $\frac{1}{2} x - \cos x + \frac{4}{3} \sin^{3/2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$).
25. $\int \frac{\cos x + 4 \cos^3 x}{4 + \cos^2 x} dx$.
(Ответ: $4 \sin x - \frac{7}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \sin x}{\sqrt{3} - \sin x} \right| + C$).
26. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$. (Ответ: $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| + C$).
27. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}}$. (Ответ: $-\frac{3}{2} \operatorname{tg}^{-2/3} x + C$).
28. $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$.
(Ответ: $\frac{1}{2} \cos x + \frac{3\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2} \cos x}{1 - \sqrt{2} \cos x} \right| + C$).
29. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$. (Ответ: $\frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$).
30. $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$. (Ответ: $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sin^2 x + C$).

ГЛАВА 10. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

10.1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СУММЫ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана функция f . Проведем следующую процедуру.

1. Разобьем отрезок $[a; b]$ точками $\{x_k\}_0^n$ на n отрезков $[x_{k-1}; x_k]$, где $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

2. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ длину отрезка $[x_{k-1}; x_k]$. Тогда $\sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$ — длина отрезка $[a; b]$.

3. Число $\lambda = \max_k \Delta x_k$ (наибольшую из длин отрезков $[x_{k-1}; x_k]$) назовем *диаметром* разбиения $\{x_k\}_0^n$.

4. На каждом из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ выберем промежуточную точку $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$.

5. Построим *интегральную сумму*

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Отметим, что интегральная сумма σ функции f на отрезке $[a; b]$ зависит как от способа разбиения отрезка точками $\{x_k\}_0^n$, так и от выбора множества промежуточных точек $\{\xi_k\}_1^n$, т.е. $\sigma = \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\})$.

Говорят, что интегральная сумма σ имеет конечный предел I при $\lambda \rightarrow +0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall \{x_k\}_0^n, \forall \{\xi_k\}_1^n$ из неравенства $\lambda \leq \delta_\varepsilon$ следует неравенство $|\sigma - I| \leq \varepsilon$.

Если существует $\lim_{\lambda \rightarrow +0} \sigma = I \in \mathbb{R}$, то функцию f называют *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a; b]$ и записывают так: $f \in \mathcal{R}([a; b])$. Число I в этом случае называют *определенным интегралом Римана* (кратко: *интегралом Римана* или *интегра-*

лом) от функции f по отрезку $[a; b]$ и обозначают $\int_a^b f(x) dx$, где число a — нижний, а b — верхний предел интегрирования. Таким образом,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Если последний предел не существует, то функция f не является интегрируемой по Риману на отрезке $[a; b]$.

Пример 10.1. Вычислить $\int_a^b f(x) dx$, если $f(x) = C$.

Решение. Произведем разбиение $\{x_k\}_0^n$ отрезка $[a; b]$ и заметим, что при любом выборе промежуточных точек $\{\xi_k\}_1^n$ следует, что $f(\xi_k) = C$. Значит, $\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n C \Delta x_k =$

$$C \sum_{k=1}^n \Delta x_k = C(b - a).$$

Поэтому $\lim_{\lambda \rightarrow +0} \sigma = C(b - a)$ и $\int_a^b C dx = C(b - a)$.

Пример 10.2. Доказать, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ рациональное,} \\ 0, & x \text{ иррациональное} \end{cases}$$

не интегрируема по Риману на отрезке $[a; b]$.

Решение. Построим разбиение $\{x_k\}_0^n$ отрезка $[a; b]$. Выберем в качестве произвольных точек $\{\xi_k\}_1^n$ рациональные значения, тогда интегральная сумма

$$\sigma = \sum_{k=1}^n D(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = b - a.$$

Если в качестве произвольных точек $\{\xi_k\}_1^n$ выберем иррациональные точки, то

$$\sigma = \sum_{k=1}^n D(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = 0.$$

Таким образом, при указанных разбиениях отрезка $[a; b]$ построенные интегральные суммы имеют разные пределы при $\lambda \rightarrow +0$. А это означает, что функция Дирихле $D(x)$ не интегрируема на $[a; b]$.

Необходимое условие интегрируемости. Если функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Пример 10.2 показывает, что это условие не является достаточным, т. е. ограниченная функция может быть неинтегрируемой.

Замечание. Интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(y) dy,$$

так как интегральная сумма зависит от значения функции, а не от обозначения переменной.

Классы $\mathcal{R}([a; b])$ интегрируемых по Риману функций

1. Непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция интегрируема на этом отрезке, т. е. $f \in C([a; b]) \Rightarrow f \in \mathcal{R}([a; b])$.

2. Если f ограничена на $[a; b]$ и $f \in \mathcal{R}([\alpha; \beta])$, $\forall [\alpha; \beta] \subset (a; b)$, то $f \in \mathcal{R}([a; b])$.

3. Если f ограничена на $[a; b]$ и имеет конечное число точек разрыва на $[a; b]$, то $f \in \mathcal{R}([a; b])$.

4. Монотонная на отрезке $[a; b]$ функция (либо монотонная на $(a; b)$ и ограниченная) интегрируема на $[a; b]$.

5. Произведение интегрируемых функций есть функция интегрируемая.

6. Модуль интегрируемой функции есть функция интегрируемая.

Замечание. Зная, что $\int_a^b f(x) dx$ существует, иногда его можно вычислить, выделив лишь некую последовательность его интегральных сумм, имеющую конечный предел.

Пример 10.3. Записать интегральную сумму σ для функции $f(x) = 1 + x$ на отрезке $[-1; 2]$, разбив его на n равных частей. Вычислить интеграл $\int_{-1}^2 (1 + x) dx$.

Решение. Построим разбиение отрезка $[-1; 2]$. Так как длина отрезка равна 3, то $\Delta x_k = 3/n$. Следовательно, разбиение имеет вид

$$\left[-1 + 0 \cdot \frac{3}{n}; -1 + \frac{3}{n}\right], \quad \left[-1 + \frac{3}{n}; -1 + 2\frac{3}{n}\right], \quad \dots$$
$$\dots, \quad \left[-1 + (k-1)\frac{3}{n}; -1 + k\frac{3}{n}\right], \quad \dots, \quad \left[-1 + (n-1)\frac{3}{n}; -1 + n\frac{3}{n}\right]$$

и

$$x_{k-1} = -1 + (k-1)\frac{3}{n}, \quad x_k = -1 + k\frac{3}{n}.$$

1. В качестве произвольных точек ξ_k выберем левые концы отрезков $[x_{k-1}; x_k]$, т. е. $\xi_k = -1 + k\frac{3}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$. Тогда

$$f(\xi_k) = 1 + \xi_k = k\frac{3}{n},$$

$$\sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{9}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k =$$

$$= \frac{9}{n^2}(0 + 1 + 2 + \dots + n - 1) = \frac{9}{n^2} \frac{1 + n - 1}{2}(n - 1) = \frac{9}{2n}(n - 1).$$

2. В качестве произвольных точек ξ_k выберем правые концы отрезков $[x_{k-1}; x_k]$, т. е. $\xi_k = -1 + k \frac{3}{n}$, $k = \overline{1, n}$. Тогда

$$f(\xi_k) = 1 + \xi_k = k \frac{3}{n},$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{9}{n^2} \frac{1+n}{2} n = \frac{9}{2n}(n+1).$$

3. В качестве произвольных точек ξ_k выберем середины отрезков $[x_{k-1}; x_k]$, т. е.

$$\begin{aligned} \xi_k &= \frac{x_{k-1} + x_k}{2} = \frac{-1 + (k-1) \frac{3}{n} + \left(-1 + k \frac{3}{n}\right)}{2} = \\ &= -1 + \frac{3}{n} \cdot \left(k - \frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{3}{n} \frac{2k-1}{2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(\xi_k) &= 1 + \xi_k = \frac{3}{n} \frac{2k-1}{2}, \\ \sigma_3 &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{3}{n} \cdot \frac{2k-1}{2} \cdot \frac{3}{n} = \\ &= \frac{9}{2n^2} \sum_{k=1}^n (2k-1) = \frac{9}{2n^2} \frac{1+2n-1}{2} n = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Поскольку функция $f(x) = 1 + x$ непрерывна на отрезке $[-1; 2]$, то

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_3 = \frac{9}{2}.$$

Отметим, что так как $\Delta x_k = 3/n$, $k = \overline{1, n}$, то, следовательно, $\lambda = \max_k \{\Delta x_k\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Замечание. Для вычисления самого интеграла $\int_{-1}^2 (1+x) dx$

достаточно было построить одну из интегральных сумм, так как $f(x) \in \mathcal{R}([-1; 2])$.

Упражнение 10.1. Вычислить определенные интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм, производя разбиение промежутка на n равных частей и выбирая промежуточные точки ξ_k указанным образом.

$$1. \int_{-1}^4 (1+x) dx, \quad \xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (\text{Ответ: } \sigma = \frac{25}{2}; \frac{25}{2}).$$

$$2. \int_{-1}^2 x^2 dx, \quad \xi_k \text{ правый конец отрезка } [x_{k-1}; x_k], \quad k = \overline{1, n}. \\ (\text{Ответ: } \sigma = -6 - \frac{9}{n} + \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2}; 3).$$

$$3. \int_0^1 e^x dx, \quad \xi_k \text{ правый конец отрезка } [x_{k-1}; x_k], \quad k = \overline{1, n}. \\ (\text{Ответ: } \sigma = \frac{e-1}{n(e^{1/2}-1)}; e-1).$$

$$4. \int_2^3 \frac{dx}{x^2}, \quad \xi_k = \sqrt{x_k x_{k+1}}, \quad k = \overline{0, n-1}. \\ (\text{Ответ: } \sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}; \frac{1}{6}).$$

Геометрический смысл определенного интеграла

Если $f \in \mathcal{R}([a; b])$ и $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x) dx$ выражает площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу отрезком прямой $y = 0$, $a \leq x \leq b$, сверху графиком функции $y = f(x)$, по бокам отрезками прямых $x = a$ и $x = b$.

10.2. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

10.2.1. Линейность интеграла

Если $f, g \in \mathcal{R}([a; b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}([a; b])$ и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx,$$

в частности

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx,$$

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

10.2.2. Аддитивность интеграла

Если $f \in \mathcal{R}([a; b])$, $a < c < b$, то $f \in \mathcal{R}([a; c])$, $f \in \mathcal{R}([c; b])$ и имеет место равенство *формула аддитивности*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Эта формула верна, если предположить, что $f \in \mathcal{R}([a; c])$, $f \in \mathcal{R}([c; b])$. Тогда $f \in \mathcal{R}([a; b])$.

При $a \geq b$ предполагают по определению, что

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Формула аддитивности верна при любом взаимном расположении точек a, b, c (при условии существования соответствующих интегралов). Следовательно, всегда имеет место *формула замыкания*

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0.$$

Пример 10.4. Вычислить $\int_{-3}^4 (2 \operatorname{sgn} x - 5 \cdot 1(x)) dx$.

Решение. Воспользуемся свойствами линейности и аддитивности интеграла:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^4 (2 \operatorname{sgn} x - 5 \cdot 1(x)) dx &= 2 \int_{-3}^4 \operatorname{sgn} x dx - \\ &- 5 \int_{-3}^4 1(x) dx = 2 \int_{-3}^0 \operatorname{sgn} x dx + 2 \int_0^4 \operatorname{sgn} x dx - 5 \int_{-3}^0 1(x) dx - \\ &- 5 \int_0^4 1(x) dx = 2 \int_{-3}^0 (-1) dx + 2 \int_0^4 dx - 5 \int_{-3}^0 1 dx - 5 \int_0^4 1 dx = \\ &= \left[\text{см. пример 10.1} \right] = -6 + 8 - 0 - 20 = -18. \end{aligned}$$

(Ответ: $\int_{-3}^4 (2 \operatorname{sgn} x - 5 \cdot 1(x)) dx = -18$).

10.2.3. Монотонность интеграла (почленное интегрирование неравенств)

Если $f, g \in \mathcal{R}([a; b])$, $a < b$ и $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Замечание. Если $a > b$, то из неравенства $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [b, a]$, следует неравенство

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

10.2.4. Оценки интегралов

1. *Основная оценка.* Если $a < b$, $f \in \mathcal{R}([a; b])$ и $A \leq f(x) \leq B$ при $x \in [a; b]$, то

$$A(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq B(b-a),$$

в частности

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

где $m = \inf_{[a; b]} f(x)$, $M = \sup_{[a; b]} f(x)$.

2. Если $a < b$ и $f, g \in \mathcal{R}([a; b])$, $g(x) \geq 0$, $A \leq f(x) \leq B$ $\forall x \in [a; b]$, то

$$A \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq B \int_a^b g(x) dx,$$

в частности

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx,$$

где $m = \inf_{[a; b]} f(x)$, $M = \sup_{[a; b]} f(x)$.

3. *Оценка модуля.* Если $f \in \mathcal{R}([a; b])$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, \quad a < b.$$

Если $|f(x)| \leq K$, то $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq K|b - a|$.

Пример 10.5. Оценить интеграл $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x dx$.

Решение. Так как $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x \leq 1$ при $x \in [\pi/4; \pi/2]$, то

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x dx \leq 1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right),$$

т. е.

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{8} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x dx \leq \frac{\pi}{4}.$$

10.2.5. Интегральная теорема о среднем

Если функция f интегрируема на промежутке I с концами a и b , $m = \inf_I f(x)$, $M = \sup_I f(x)$, то $\exists \mu : m \leq \mu \leq M$ такое, что

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b - a).$$

Число μ в этом случае называется *средним значением функции f на промежутке I* . Если при этом функция f непрерывна на I , то $\exists \xi \in I$ такое, что $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$.

Теорема. Если $f, g \in \mathcal{R}(I)$, где I — промежуток с концами a и b , $g(x) \geq 0 (\leq 0)$, то $\exists \mu_1 : m \leq \mu_1 \leq M$ ($m = \inf_I f(x)$, $M = \sup_I f(x)$) такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu_1 \int_a^b g(x) dx.$$

В частности, если $f \in C([a; b])$, то $\exists \xi \in I$ такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

Пример 10.6. Найти среднее значение функции $2 \operatorname{sgn} x - 5 \times 1(x)$ на отрезке $[-3; 4]$.

Решение. Так как $\int_{-3}^4 (2 \operatorname{sgn} x - 5 \cdot 1(x)) dx = -18$ (см. пример 10.4), $b - a = 4 - (-3) = 7$, то $\mu = -18/7$.

Таким образом, среднее значение функции $2 \operatorname{sgn} x - 5 \cdot 1(x)$ на отрезке $[-3; 4]$ равно $-18/7$.

Упражнение 10.2. Какой интеграл больше?

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx$ или $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$. (Ответ: $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$).
2. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$ или $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x dx$. (Ответ: $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$).
3. $\int_0^1 e^{-x} dx$ или $\int_0^1 e^{-x^2} dx$. (Ответ: $\int_0^1 e^{-x^2} dx$).

10.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

10.3.1. Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция f задана на промежутке I и $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset I$. Зафиксируем $a \in I$ и на промежутке I зададим функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in I,$$

которая называется *интегралом с переменным верхним пределом*. Переменную интегрирования, во избежание путаницы с аргументом функции Φ , заменили другой буквой.

Функция Φ непрерывна на промежутке I .

Теорема Барроу. *Функция $\Phi(x)$ дифференцируема в каждой точке $x \in I$, в которой f непрерывна, при этом*

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)'_x = f(x),$$

т. е. производная интеграла с переменным верхним пределом в точке x равна значению подынтегральной функции в этой точке.

Следствие. *Если функция f непрерывна на промежутке I , то у нее существуют первообразные, одной из которых является*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in I.$$

Отсюда получим формулу, выражающую связь неопределенного интеграла с определенным:

$$\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt + C.$$

Замечание. Можно рассматривать и интеграл с переменным нижним пределом. Тогда

$$\left(\int_x^b f(t) dt \right)' = \left(- \int_b^x f(t) dt \right)'_x = -f(x).$$

Замечание. Если f непрерывна на I , а функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке $x \in I$, то

$$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right)'_x = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Таким образом, теорема Барроу позволяет исследовать функции с помощью производных, не прибегая к вычислению интегралов.

Пример 10.7. Вычислить производную функции

$$\int_0^{\sin 2x} \frac{\cos t}{1+t^2} dt.$$

Решение. $\left(\int_0^{\sin 2x} \frac{\cos t}{1+t^2} dt \right)'_x = \frac{\cos(\sin 2x)}{1+\sin^2 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2.$

Пример 10.8. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt.$

Решение. Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0} \right)$, поскольку

$$\lim_{x \rightarrow +0} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt = 0,$$

используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin \sqrt{x^2}}{3x^2} \cdot 2x = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3}.$$

Пример 10.9. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} 2t)^2 dt}{\sqrt{4x^2 + 1}}.$

Решение. Используем замену эквивалентными:

$$\sqrt{4x^2 + 1} \sim 2x \text{ при } x \rightarrow +\infty. \text{ Тогда } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} 2t)^2 dt}{\sqrt{4x^2 + 1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} 2t)^2 dt}{2x} = \left[\int_0^{+\infty} (\operatorname{arctg} 2t)^2 dt \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow +\infty; \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \text{ правило Лопиталя} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\operatorname{arctg} 2x)^2}{2} = \frac{\pi^2/4}{2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Пример 10.10. Найти точки локального экстремума функции

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{t^2} (t^2 - 5t + 6) dt.$$

Решение. $\Phi'(x) = e^{x^2} (x^2 - 5x + 6)$. Стационарные точки $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Знак производной меняется с «+» на «-» при переходе через точку 2, значит, $x = 2$ — точка локального максимума, и с «-» на «+» при переходе через точку 3, значит, $x = 3$ — точка локального минимума.

Пример 10.11. Исследовать направление выпуклости и найти точки перегиба функции $\Phi(x) = \int_0^x e^{t^2} t^2 dt$.

Решение. $\Phi'(x) = e^{x^2} \cdot x^2$, $\Phi''(x) = e^{x^2} \cdot 2x \cdot x^2 + e^{x^2} \cdot 2x = 2e^{x^2} \times x(x^2 + 1)$. Так как $\Phi''(0) = 0$ и $\Phi''(x) < 0$ при $x < 0$, а $\Phi''(x) > 0$ при $x > 0$, то на промежутке $(-\infty; 0)$ функция вогнута, на промежутке $(0; +\infty)$ — выпукла; $(0; 0)$ — точка перегиба.

Упражнение 10.3. Найти производные.

$$1. \left(\int_a^b \sin t^2 dt \right)'_x. \quad (\text{Ответ: } 0).$$

$$2. \left(\int_a^x \sin t^2 dt \right)'_x. \quad (\text{Ответ: } \sin x^2).$$

$$3. \left(\int_x^b \sin t^2 dt \right)'_x. \quad (\text{Ответ: } -\sin x^2).$$

$$4. \left(\int_a^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt \right)'_x. \quad (\text{Ответ: } \sqrt{1+x^4} \cdot 2x).$$

$$5. \left(\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \right)'_x. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{1+x^{12}}} \cdot 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{1+x^8}} \cdot 2x).$$

$$6. \left(\int_{\sin x}^{\cos x} (\cos \pi t^3) dt \right)'_x. \quad (\text{Ответ: } -\sin x \cdot \cos(\pi \cos^3 x) - \cos x \cdot \cos(\pi \sin^3 x)).$$

Упражнение 10.4. Найти пределы.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{\ln(1+x)}. \quad (\text{Ответ: } 1).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1/2}}. \quad (\text{Ответ: } \frac{\pi^4}{4}).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}. \quad (\text{Ответ: } 0).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \operatorname{tg} t dt}{\operatorname{tg} x \int_0^x \sin t dt}. \quad (\text{Ответ: } 1).$$

10.3.2. Формула Ньютона Лейбница

Пусть функция f непрерывна на промежутке I и $F(x)$ одна из ее первообразных, тогда $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Выражения $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$, $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ называются *двойной подстановкой*.

Если известна какая-либо из первообразных функции f на промежутке, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Эта основная формула интегрального исчисления называется *формулой двойной подстановки*.

Так как

$$[F(x) + C]_a^b = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b,$$

то результат вычисления интеграла $\int_a^b f(x) dx$ не зависит от выбора первообразной, что позволяет записать

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\int f(x) dx \right]_a^b.$$

Это *формула Ньютона — Лейбница*. Она выражает связь определенного интеграла с неопределенным и является основным методом вычисления определенных интегралов.

Обращаем внимание, что двойная подстановка обладает свойством линейности, т. е. ее можно осуществлять почленно (если $F(x)$ есть линейная комбинация функций).

Пример 10.12. Вычислить $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$.

Решение. Так как $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, то $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$.

$$\text{Поэтому } \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 10.13. Вычислить $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x dx$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x dx &= -\ln |\cos x| \Big|_0^{\pi/3} = -\ln \cos \frac{\pi}{3} + \ln \cos 0 = \\ &= -\ln \frac{1}{2} + \ln 1 = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2. \end{aligned}$$

Пример 10.14. С помощью определенного интеграла вычислить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

Решение. Преобразуем сумму

$$\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}.$$

Далее рассмотрим отрезок $[0; 1]$ и разобьем его на n равных частей. Тогда $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ и разбиение имеет вид

$$\left[0, 0 + \frac{1}{n} \right], \quad \left[\frac{1}{n}, 2 \cdot \frac{1}{n} \right], \quad \dots, \quad \left[\frac{1}{n}(k-1), k \frac{1}{n} \right], \quad \dots, \quad \left[\frac{1}{n}(n-1), n \frac{1}{n} \right].$$

В результате получим $\Delta x_k = \frac{1}{n}$, $\xi_k = \frac{k}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$, и

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \Delta x_k = \sigma$$

для функции $f(x) = x$ на отрезке $[0; 1]$, так как $f(\xi_k) = \xi_k$.
А тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} = \int_0^1 x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Пример 10.15. С помощью определенного интеграла вычислить предел последовательности $S_n = \frac{1^5 + 2^5 + \dots + n^5}{n^6}$ при $n \rightarrow \infty$.

Решение. $S_n = \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n} \right)^5 + \left(\frac{2}{n} \right)^5 + \dots + \left(\frac{n}{n} \right)^5 \right) =$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^5 \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \xi_k^5 \Delta x_k = \sigma \text{ по отрезку } [0; 1], \text{ где } \xi_k = \frac{k}{n},$$

$k = \overline{1, n}$. И так как $f(\xi_k) = \xi_k^5$, то $f(x) = x^5$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma = \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{6}.$$

Пример 10.16. С помощью определенного интеграла вычислить предел последовательности $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$ при $n \rightarrow \infty$.

Решение. Преобразуем сумму $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2(1 + \frac{k^2}{n^2})} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \xi_k^2} \Delta x_k = \sigma$ для непрерывной функции $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ на отрезке $[0; 1]$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Пример 10.17. С помощью определенного интеграла найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \cos \frac{k\pi}{2n}}.$$

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \cos \frac{k\pi}{2n}} = \left[\sin \frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n} \text{ при } n \rightarrow \infty \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \cos \frac{k\pi}{2n}} \frac{\pi}{n} = \left[\Delta x_k = \frac{\pi}{n}, \quad \xi_k = \frac{k\pi}{n}, \quad k = \overline{1, n}; \right.$
 $f(\xi_k) = \frac{1}{1 + \cos \frac{1}{2} \xi_k} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1 + \cos \frac{x}{2}} \text{ на отрезке } [0; \pi] \Big] =$
 $\int_0^\pi \frac{1}{1 + \cos \frac{x}{2}} dx = \int_0^\pi \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{4}} dx = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{4} \Big|_0^\pi = 2 \cdot 1 = 2.$

Упражнение 10.5. С помощью определенного интеграла вычислить предел последовательности S_n при $n \rightarrow \infty$.

$$1. S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}. \quad (\text{Ответ: } \ln 2; \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ на } [0; 1]).$$

$$2. S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k}{n} \pi. \\ (\text{Ответ: } \frac{2}{\pi}; \quad f(x) = \sin \pi x \text{ на } [0; 1] \text{ или } f(x) = \sin x \text{ на } [0; \pi]).$$

$$3. S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}}. \\ (\text{Ответ: } \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1); \quad f(x) = \sqrt{1+x} \text{ на } [0; 1]).$$

Упражнение 10.6. Вычислить интегралы.

$$1. \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}. \quad (\text{Ответ: } 2).$$

$$2. \int_0^{\pi} (1 + \sin x) dx. \quad (\text{Ответ: } \pi + 2).$$

$$3. \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}. \quad (\text{Ответ: } \frac{\pi}{6}).$$

$$4. \int_3^2 x^3 dx. \quad (\text{Ответ: } -\frac{65}{4}).$$

$$5. \int_0^1 \frac{dx}{1+x}. \quad (\text{Ответ: } \ln 2).$$

$$6. \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}}. \quad (\text{Ответ: } 2).$$

$$7. \int_0^2 |1-x| dx. \quad (\text{Ответ: } 1).$$

10.3.3. Замена переменной в определенном интеграле

Формула Ньютона — Лейбница позволяет перенести на определенные интегралы основные приемы вычисления неопределенных интегралов: разложение в сумму, замену переменных, интегрирование по частям.

Теорема 1. Пусть:

- 1) функция φ непрерывно дифференцируема на промежутке с концами a и b ;
- 2) функция f непрерывна на $E(\varphi)$ — множестве значений функции φ .

Тогда

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt.$$

Теорема 2. Пусть:

- 1) функция φ непрерывно дифференцируема, строго монотонна на промежутке J с концами α и β и осуществляет биекцию J на промежуток I с концами a и b так, что $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, т. е. $\alpha = \varphi^{-1}(a)$, $\beta = \varphi^{-1}(b)$;
- 2) функция f непрерывна на промежутке I .

Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Приведенные формулы и есть формулы замены переменных в определенном интеграле, причем необязательно $a < b$ либо $\alpha < \beta$.

Замечание. При замене переменной в определенном интеграле отпадает необходимость возвращения после вычислений к начальной переменной, как это было в неопределенном интеграле.

Внимание! 1) Если функция f нечетная на промежутке

$$[-l; l], \text{ т. е. } -f(x) = f(-x), \text{ то } \int_{-l}^l f(x) dx = 0.$$

2) Если функция f четная на промежутке $[-l; l]$, т. е. $f(x) =$

$$f(-x), \text{ то } \int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx.$$

Пример 10.18. Вычислить $\int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$.

Решение. $\int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} = \left[\text{положим } t = \ln x, \quad dt = \frac{dx}{x}; \right.$

$$\left. x_1 = 1 \Rightarrow t_1 = 0, \quad x_2 = e \Rightarrow t_2 = 1 \right] = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 =$$

$$\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 10.19. Вычислить $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$.

Решение. $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left[\text{положим } x = R \sin t, \quad 0 \leq t \leq \right.$

$$\left. \leq \frac{\pi}{2}, \quad dx = R \cos t dt, \quad \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} = R \sqrt{\cos^2 t} = \right.$$

$$\left. R \cos t, \text{ так как } \cos t \geq 0 \text{ при } t \in [0; \pi/2]; \quad x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \right.$$

$$\left. 0, \quad x_2 = R \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{2} \right] = \int_0^{\pi/2} R^2 \cos^2 t dt = R^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$\frac{R^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} \right) = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Пример 10.20. Вычислить $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left[\text{вынесем из-под корня } |x|, \text{ но так как } x < 0, \text{ то } |x| = -x \right] = - \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \left[\frac{1}{x} = t, \quad dt = -\frac{dx}{x^2}; \right.$
 $x_1 = -2 \Rightarrow t_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = -1 \Rightarrow t_2 = -1 \left. \right] = \int_{-1/2}^{-1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$
 $= \arcsin t \Big|_{-1/2}^{-1} = \arcsin(-1) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin 1 + \arcsin \frac{1}{2} =$
 $-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}.$

Пример 10.21. Вычислить $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 x + x^4 \sin x) dx$.

Решение. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 x + x^4 \sin x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x dx +$
 $+ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^4 \sin x dx = \left[\text{на } [-\pi/2; \pi/2] \text{ функция } \cos^2 x \text{ четная,} \right.$
 $\left. \text{функция } x^4 \sin x \text{ нечетная} \right] = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx + 0 = \int_0^{\pi/2} (1 +$
 $+ \cos 2x) dx = \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$

10.3.4. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема. Пусть функции u и v непрерывно дифференцируемы на промежутке с концами a и b . Тогда

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x).$$

Эта теорема содержит формулу интегрирования по частям определенного интеграла.

Пример 10.22. Вычислить $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin 2x dx$.

Решение. $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin 2x dx = \left[\text{положим } u = x^2, dv = \sin 2x dx \Rightarrow du = 2x dx, v = -\frac{\cos 2x}{2} \right] = -x^2 \frac{\cos 2x}{2} \Big|_0^{\pi/2} - \left(- \int_0^{\pi/2} x \cos 2x dx \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \cos \pi + \int_0^{\pi/2} x \cos 2x dx = \left[\text{по частям: } u = x, dv = \cos 2x dx \Rightarrow du = dx, v = \frac{\sin 2x}{2} \right] = -\frac{\pi^2}{8} \cos \pi + x \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx = \frac{\pi^2}{8} + 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 2x}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} (-1 - 1) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}.$

Пример 10.23. Вычислить $\int_1^e \ln x dx$.

Решение. $\int_1^e \ln x \, dx = \left[u = \ln x, \, dv = dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \, v = x \right] = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e \ln e - \ln 1 - x \Big|_1^e = e - 0 - (e - 1) = 1.$

Пример 10.24. Вычислить $\int_0^{1/4} \arcsin 2x \, dx.$

Решение. $\int_0^{1/4} \arcsin 2x \, dx = \left[u = \arcsin 2x, \, dv = dx \Rightarrow du = \frac{2 \, dx}{\sqrt{1-4x^2}}, \, v = x \right] = x \arcsin 2x \Big|_0^{1/4} - 2 \int_0^{1/4} \frac{x \, dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{4} \arcsin \frac{1}{2} +$
 $+ \frac{1}{2} \int_0^{1/4} \frac{d(1-4x^2)}{2\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} \Big|_0^{1/4} = \frac{\pi}{24} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{4}} - 1 \right) =$
 $\frac{\pi}{24} + \frac{1}{4}(\sqrt{3} - 2).$

10.3.5. Понятие несобственных интегралов

Если функция $f(x) \in \mathcal{R}([a; b])$, где $[a; b]$ — любой конечный отрезок из $\mathbb{R}$, то по определению полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Аналогично

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Если указанные пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы *первого типа* $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ называются *сходящимися*.

Отметим, что если $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$ то, например,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a).$$

Если функция $f(x)$ неограниченна в окрестности точки b и $f(x) \in \mathcal{R}([a; b - \varepsilon])$, $\varepsilon > 0$, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Аналогично если $f(x)$ неограниченна в окрестности точки a и $f(x) \in \mathcal{R}([a + \delta; b])$, $\delta > 0$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx.$$

Если указанные пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы *второго типа* $\int_a^b f(x) dx$ называются *сходящимися*.

Замечание. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^l f(x) dx + \int_l^{+\infty} f(x) dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^l f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_l^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Если $a < c < b$ и в окрестности точки c функция $f(x)$ неограниченна, то

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{c-\delta} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx.\end{aligned}$$

Отметим, что для вычисления несобственных интегралов используются те же приемы, что и для вычисления определенных интегралов.

Пример 10.25. Вычислить $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x + 2 \sin^2 x}$.

Решение.

Первый подход. Так как на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ подынтегральная функция четная, то $I = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x + 2 \sin^2 x} =$
 $\left[\text{преобразуем подынтегральную функцию} \right] =$
 $2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x \left(1 + 2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right)} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + 2 \operatorname{tg}^2 x)} = \left[\operatorname{tg} x = \right.$
 $t \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} - 0 \Rightarrow t_2 = +$
 $+\infty \left. \right] = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + 2t^2} = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} \frac{d(\sqrt{2}t)}{1 + (\sqrt{2}t)^2} = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{2}t \Big|_0^{+\infty} =$
 $\sqrt{2} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \sqrt{2}t - \operatorname{arctg} 0 \right) = \sqrt{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

$$\text{Второй подход. } I = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x + 2 \sin^2 x} =$$

$$2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 + 2 \operatorname{ctg}^2 x)} = \left[\operatorname{ctg} x = t \Rightarrow dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}, \right.$$

$$\left. x_1 = +0 \Rightarrow t = +\infty, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_2 = 0 \right] = -2 \int_{+\infty}^0 \frac{dt}{2+t^2} =$$

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2+t^2} = 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = \sqrt{2} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} - 0 \right) = \sqrt{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Пример 10.26. Вычислить $\int_0^{+\infty} x e^{-3x} dx$.

Решение. $\int_0^{+\infty} x e^{-3x} dx = \left[\text{по частям: } u = x, \quad dv = \right.$

$$= e^{-3x} dx \Rightarrow du = dx, \quad v = -\frac{e^{-3x}}{3} \Big] = -\frac{x e^{-3x}}{3} \Big|_0^{+\infty} +$$

$$+ \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{3x}} - 0 \right) - \frac{1}{9} e^{-3x} \Big|_0^{+\infty} = 0 -$$

$$- \frac{1}{9} (\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} - 1) = \frac{1}{9}.$$

Пример 10.27. Вычислить $I = \int_{-1}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Поскольку на интервале $(-1; 1)$ подынтегральная функция четная, то $I = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. А так как подынте-

гравальная функция неограниченна около $x = 1$, то это несоб-
 ственный интеграл второго типа и $I = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$
 $2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = 2 \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \arcsin(1-\varepsilon) - 0 \right) = 2 \frac{\pi}{2} = \pi.$

Пример 10.28. Вычислить $I = \int_{-1}^1 \frac{\arccos x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Решение. Подозрительными на неограниченность функции
 являются точки $x = 1$ и $x = -1$. Для этого рассмотрим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} &= \left[\left(\frac{0}{0} \right), \text{ правило Лопиталья} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-2\sqrt{1-x^2}}{(\sqrt{1-x^2})(-2x)} = 1. \end{aligned}$$

Это означает, что в окрестности точки $x = 1$ функция ограни-
 чена и поэтому точка $x = 1$ не является особой.

Далее,

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\arccos x \rightarrow \pi \text{ при } x \rightarrow -1+0 \right] = \infty,$$

следовательно, в окрестности точки $x = -1$ функция неограни-
 ченна. Тогда

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-1+\varepsilon}^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-1+\varepsilon}^1 \arccos x \, d(\arccos x) = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arccos^2 x \Big|_{-1+\varepsilon}^1 = 0 + \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arccos^2(-1+\varepsilon) = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Пример 10.29. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x}$.

Решение. $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 = 0 - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \varepsilon = 0 + \infty = +\infty$. Следовательно, интеграл расходится.

Пример 10.30. Вычислить $\int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}$.

Решение. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} = \left[\text{универсальная подстановка} \right.$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2 dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x_1 = 0 \Rightarrow \\ t_1 = 0, \quad x_2 = \pi - 0 \Rightarrow t_2 = +\infty \end{aligned} \right] = \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{(1+t^2) \left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} =$$

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{3}.$$

Упражнение 10.7. Вычислить интегралы.

1. $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx.$ (Ответ: $\frac{7}{3}$).

2. $\int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 + x - 1) dx.$ (Ответ: $-\frac{10}{3}$).

3. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ (Ответ: $\frac{\pi}{3}$).

4. $\int_0^2 2^x dx.$ (ОТВЕТ: $\frac{3}{\ln 2}$).
5. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}.$ (ОТВЕТ: $\frac{\pi}{12}$).
6. $\int_3^4 \frac{x^3+3}{x-2} dx.$ (ОТВЕТ: $\frac{11}{2} + 7 \ln 2$).
7. $\int_1^2 \frac{e^{1/x^2}}{x^3} dx.$ (ОТВЕТ: $\frac{1}{2}(e - e^{1/4})$).
8. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx.$ (ОТВЕТ: $\frac{1}{2}e^{1/2}$).
9. $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$ (ОТВЕТ: $\sin 1$).
10. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}.$ (ОТВЕТ: $\ln 2$).
11. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx.$ (ОТВЕТ: $\frac{2}{3}$).
12. $\int_1^2 x \ln x dx.$ (ОТВЕТ: $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$).
13. $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx.$ (ОТВЕТ: $\pi^3 - 6\pi$).
14. $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx.$ (ОТВЕТ: $\frac{e^{\pi} - 2}{5}$).

15. $\int_{-1}^1 \operatorname{ch} x \operatorname{tg} x dx.$ (Ответ: 0).
16. $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^4} \sin x dx.$ (Ответ: 0).
17. $\int_0^1 \arcsin \sqrt{x} dx.$ (Ответ: $\frac{\pi}{4}$).
18. $\int_{1/e}^e |\ln x| dx.$ (Ответ: $2(1 - e^{-1})$).
19. $\int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$ (Ответ: $\frac{1}{6}$).
20. $\int_0^2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx.$ Указание: $u = \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}}.$
(Ответ: $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$).
21. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + \cos x}.$ (Ответ: $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$).

10.4. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

10.4.1. Площадь плоских фигур

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$.

Площадь фигуры Φ (рис. 46), ограниченной графиком функции $y = f(x)$, отрезком $[a; b]$ оси Ox и соответствующими отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Фигуру Φ иногда называют *криволинейной трапецией*.

Пусть функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и $f_2(x) \geq f_1(x)$, $x \in [a; b]$. Площадь фигуры Φ (рис. 47), ограниченной графиками функций и соответствующими отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Замечание. Если графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ ограничивают фигуру Φ , то $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Если рассматривать в полярной системе координат (φ, r) криволинейный сектор (рис. 48), ограниченный кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$, то его площадь

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

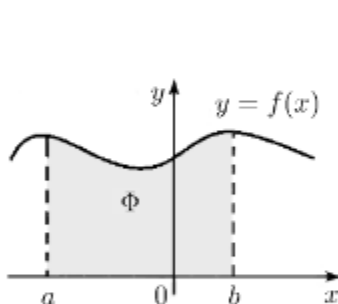


Рис. 46

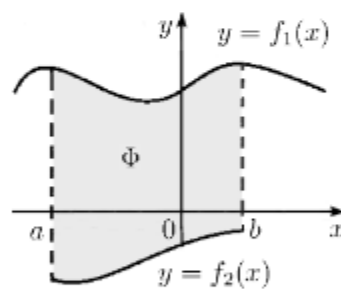


Рис. 47

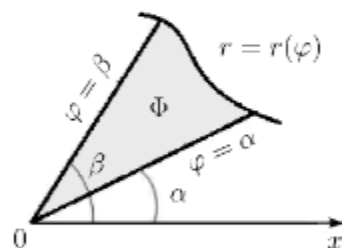


Рис. 48

Пример 10.31. Вычислить площадь фигуры Φ , ограниченной параболой $y = 6x - x^2 - 7$ и прямой $y = x - 3$.

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения данных линий:

$$\begin{cases} y = 6x - x^2 - 7, \\ y = x - 3 \end{cases} \Rightarrow 6x - x^2 - 7 = x - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4.$$

Нарисуем фигуру Φ (рис. 49): $y = 6x - x^2 - 7$ — парабола, ветви которой направлены вниз; $y' = 6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3, y = 2$ — вершина параболы; $y(1) = -2, y(4) = 1$.

$$\text{Следовательно, } S = \int_1^4 (6x - x^2 - 7 - (x - 3)) dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4) dx = \left. \frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} - 4x \right|_1^4 = \frac{9}{2}.$$

Пример 10.32. Вычислить площадь фигуры Φ , ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 50).

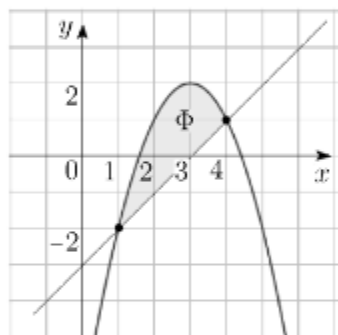


Рис. 49

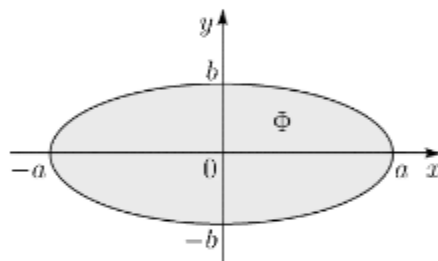


Рис. 50

Решение. Учитывая симметрию фигуры Φ относительно осей координат, можем подсчитать площадь четвертой части, лежащей в первой четверти.

Из уравнения эллипса найдем $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

$$\text{Тогда } S_{\Phi} = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left[x = \right.$$

$$\left. a \sin t, dx = a \cos t dt, \sqrt{a^2 - x^2} = d(a \cos t), 0 \leq t \leq \pi/2 \right] =$$

$$4 \frac{b}{a} a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{4\pi ab}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \pi ab.$$

Замечание. Площадь круга радиуса R вычисляется по формуле $S = \pi R^2$. Площадь фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями a и b , вычисляется по формуле $S = \pi ab$.

Пример 10.33. Вычислить площадь фигуры Φ , ограниченной кривой $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

Решение. В силу четности функции относительно x , и y график функции расположен симметрично относительно осей координат. А поскольку $y^2 \geq 0$, то и $x^2(a^2 - x^2) \geq 0$.

Следовательно, $a^2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow |x| \leq a$. Таким образом, $S =$

$$= 4 \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4}{2} \int_0^a (a^2 - x^2)^{1/2} dx^2 = -2 \frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{3} \cdot \frac{1}{2} \Big|_0^a =$$

$$-\frac{4}{3}(0 - a^3) = \frac{4}{3}a^3.$$

Пример 10.34. Вычислить площадь фигуры Φ , ограниченной линией $r = a(1 + \cos \varphi)$.

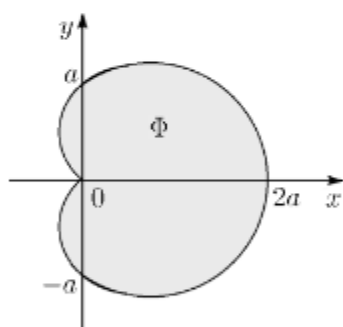


Рис. 51

Решение. Линия (рис. 51) в полярной системе координат это кардиоида, которая симметрична относительно полярной оси, следовательно,

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^\pi (1 +$$

$$+ 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = a^2 \int_0^\pi \left(1 + 2 \cos \varphi + \right.$$

$$+ \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \Big) d\varphi = a^2 \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} + 2 \cos \varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = a^2 \left(\frac{3}{2} \varphi + \right.$$

$$+ 2 \sin \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} \Big) \Big|_0^\pi = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

Пример 10.35. Вычислить площадь фигуры Φ , ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 6x$, $\sqrt{3}y + x = 0$, $y - \sqrt{3}x = 0$.

Решение. Преобразуем уравнения: $x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 6x \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 9$.

Изобразим фигуру Φ (рис. 52).

Как видно из рисунка, требуется найти площадь части кольца, заключенного между прямыми $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ и $y = \sqrt{3}x$.

Для нахождения площади перейдем к полярной системе координат: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. В этом случае $x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow r_1 = 2 \cos \varphi$; $x^2 + y^2 = 6x \Leftrightarrow r_2 = 6 \cos \varphi$; $y = \sqrt{3}x \Leftrightarrow \varphi = \pi/3$; $y = -x/\sqrt{3} \Leftrightarrow \varphi = -\pi/6$.

Таким образом,

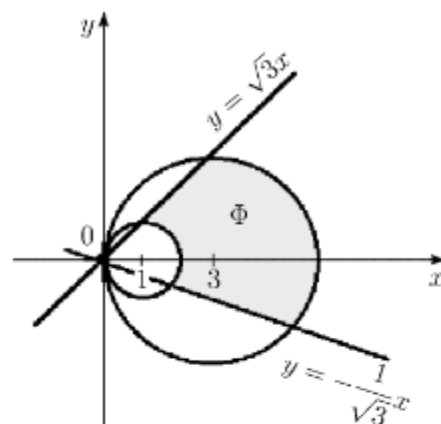


Рис. 52

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/3} (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/3} (36 \cos^2 \varphi - 4 \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/3} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= 8 \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_{-\pi/6}^{\pi/3} = 8 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \left(\sin \frac{2\pi}{3} - \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) \right) =$$

$$= 8 \frac{\pi}{2} + 4 \left(\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \right) = 4\pi + 4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4(\pi + \sqrt{3}).$$

Упражнение 10.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми.

1. $4x = y^2$, $4y = x^2$.

(Ответ: $\frac{16}{3}$).

2. $y = x^2 - 2x$, $y = x + 4$. (Ответ: $\frac{125}{6}$).
3. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$. (Ответ: a^2).
4. $r = a \sin 2\varphi$ (площадь одного лепестка). (Ответ: $\frac{\pi a^2}{8}$).
5. $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 4y$, $\sqrt{3}y - x = 4\sqrt{3}$, $y + \sqrt{3}x = 4$. (Ответ: $6(\pi + \sqrt{3})$).

10.4.2. Длина дуги кривой

Длина плоской кривой $y = y(x)$, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b,$$

где $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a; b]$ функции, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Если плоская кривая задана явно уравнением $y(x)$, $x \in [a; b]$, где $y(x)$ непрерывно дифференцируемая на $[a; b]$ функция, то ее длина

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

Длина плоской кривой, заданной в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, где $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируемая на отрезке $[\alpha; \beta]$ функция, вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi.$$

Замечание. Длина пространственной кривой, заданной параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a; b]$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a; b]$ функции, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt.$$

Пример 10.36. Найти длину кривой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (астроида).

Решение. Кривая (рис. 53) задана неявным уравнением. Для решения задачи нам требуется одно из заданий: параметрическое, явное или в полярной системе координат.

Параметрическое уравнение имеет вид

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Сначала вычислим производные $x'(t) = 3a \cos^2 t (-\sin t)$, $y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t$ и выражения $x'^2(t) + y'^2(t) = 9a^2(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t$;

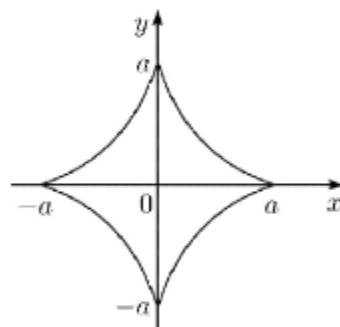


Рис. 53

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 3a |\cos t \sin t|.$$

Поскольку кривая симметрична относительно координатных осей, то будем считать длину четвертой части кривой, лежащей в первой четверти, и, следовательно, $0 \leq t \leq \pi/2$.

$$\begin{aligned} \text{В результате } l &= 4 \int_0^{\pi/2} 3a \cos t \sin t dt = 12a \int_0^{\pi/2} \sin t d(\sin t) = \\ &= 12a \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = 6a \sin^2 \frac{\pi}{2} = 6a. \end{aligned}$$

Пример 10.37. Найти длину дуги кривой $y = x^{3/2}$ от точки $(1; 1)$ до точки $(4; 8)$.

Решение. Уравнение кривой задано в явном виде, поэтому

$$\sqrt{1 + y'^2(x)} = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} l &= \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \bigg|_1^4 = \\ &= \frac{8}{27} \left(\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^{3/2} - \left(1 + \frac{9}{4} \cdot 1\right)^{3/2} \right) = \frac{8}{27} \left(10^{3/2} - \frac{13^{3/2}}{8}\right) = \\ &= \frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}). \end{aligned}$$

Пример 10.38. Найти длину дуги кривой

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3}, \quad 0 \leq x \leq 2\sqrt{3}.$$

Решение. Кривая задана в явном виде $x = x(y)$. Чтобы найти длину дуги кривой, надо знать пределы изменения y :

$$x_1 = 0 \Rightarrow 0 = \frac{2}{3}\sqrt{(y_1-1)^3} \Rightarrow y_1 = 1,$$

$$x_2 = 2\sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{(y_2-1)^3} \Rightarrow (y_2-1)^{3/2} = 3\sqrt{3} \Rightarrow y_2 = 4.$$

$$\text{Далее, } \sqrt{1 + x'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}(y-1)^{1/2}\right)^2} = \sqrt{1 + y - 1} = \sqrt{y}.$$

$$\text{Следовательно, } l = \int_1^4 \sqrt{y} dy = \frac{2}{3}y^{3/2} \bigg|_1^4 = \frac{2}{3}(8 - 1) = \frac{14}{3}.$$

Пример 10.39. Найти длину дуги кривой $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$.

Решение. Поскольку $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4x} = \frac{4x+1}{4x}$,

$$\begin{aligned} \text{то } l &= \int_0^1 \sqrt{\frac{4x+1}{4x}} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \sqrt{4x+1} d(\sqrt{x}) = \\ &= \left[\sqrt{x} = t, \quad x = t^2; \quad x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0, \quad x_2 = 1 \Rightarrow \right. \\ &\left. t_2 = 1 \right] = \int_0^1 \sqrt{4t^2+1} dt = 2 \int_0^1 \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} dt = \left[\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \right. \\ &\left. \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C \right] = 2 \left(\frac{t}{2} \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{8} \ln \left| t + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} \right| \right) \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{4} \left(\ln \left(1 + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) - \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{5} + \\ &+ \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \sqrt{5}/2}{1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}) = \frac{1}{4} (2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})). \end{aligned}$$

Отметим, что $\int_0^1 \frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}} dx$ — несобственный интеграл вто-

рого типа, так как подынтегральная функция $\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +0$. Но замена $t = \sqrt{x}$ свела этот интеграл к собственному $\int_0^1 \sqrt{4t^2+1} dt$.

Возможен и иной подход к вычислению длины этой дуги. Для этого выберем y за независимую переменную. Тогда $x = y^2$, $0 \leq y \leq 1$. Далее $x' = 2y$, $1 + x'^2 = 1 + 4y^2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{4y^2+1} dy &= \left[\text{см. выше вычисление } \int_0^1 \sqrt{4t^2+1} dt \right] = \\ &= \frac{1}{4} (2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})). \end{aligned}$$

Пример 10.40. Найти длину дуги кривой $r = a(1 + \cos \varphi)$ (кардиоида).

Решение. Кривая (см. рис. 51, с. 440) задана в полярной системе координат:

$$\begin{aligned} r' &= -a \sin \varphi, \\ \sqrt{r^2 + r'^2} &= \sqrt{a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= a\sqrt{1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = a\sqrt{2(1 + \cos \varphi)} = \\ &= 2a\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = 2a \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|. \end{aligned}$$

Поскольку кривая симметрична относительно полярной оси, то можно рассматривать только углы $0 \leq \varphi \leq \pi$, а тогда $\sqrt{r^2 + r'^2} = 2a \cos(\varphi/2)$.

$$\begin{aligned} \text{В результате } l &= 2 \int_0^{\pi} 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ &= 4a \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = 8a \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = 8a. \end{aligned}$$

Упражнение 10.9. Найти длину дуги кривой.

1. $y = 2x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 11$. (Ответ: 74).

2. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y$, $0 \leq y \leq e$. (Ответ: $\frac{e^2 + 1}{4}$).

3. $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (Ответ: 16).

4. $r = 4(1 - \cos \varphi)$. (Ответ: 32).

10.4.3. Вычисление объемов тел

10.4.3.1. Выражение объема через площадь поперечного сечения. Если тело, расположенное между плоскостями $x = a$ и $x = b$, в каждом сечении плоскостями, перпендикуляр-

ными оси x , имеет площадь $S(x)$, то объем тела вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

10.4.3.2. Объем тела вращения. При вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, отрезком $[a; b]$ оси Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, получается тело вращения, объем которого выражается формулой

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Если рассматриваемая криволинейная трапеция, в которой $a \geq 0$, вращается вокруг оси Oy , то объем такого тела можно найти по формуле

$$V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx.$$

Пример 10.41. Найти объем тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

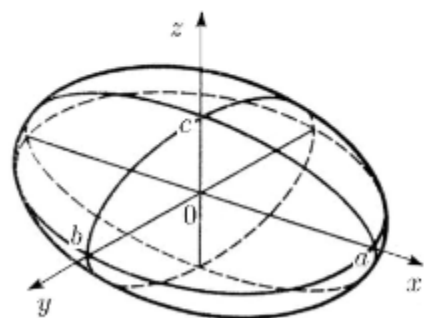


Рис. 54

Решение. Поскольку тело (рис. 54) симметрично относительно плоскости $z = 0$, то объем тела будет равен двум объемам тела, ограниченного поверхностями $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ и $z = 0$.

При сечении этого тела плоскостями $z = \text{const}$ получим фигуры,

ограниченные эллипсами $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$, $0 \leq z \leq c$
или $\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} = 1$ с полуосями $a_1 =$
 $a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$, $b_1 = b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$.

Следовательно (см. пример 10.32),

$$S(z) = \pi a_1 b_1 = \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right), \quad 0 \leq z \leq c.$$

$$\begin{aligned} \text{Таким образом, } V &= 2 \int_0^c S(z) dz = 2 \int_0^c \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \\ &= 2\pi ab \left[z - \frac{z^3}{3c^2}\right]_0^c = 2\pi ab \left(c - \frac{c}{3}\right) = 2\pi ab \frac{2c}{3} = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

Замечание. Шар радиусом R имеет объем $V = \frac{4}{3} \pi R^3$. Объем тела, ограниченного эллипсоидом с полуосями a , b и c , вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3} \pi abc$.

Пример 10.42. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = y$, $z \geq 0$.

Решение. В сечении тела (рис. 55) плоскостями $y = \text{const}$ получим прямоугольники с основаниями $2\sqrt{R^2 - y^2}$ и высотой y . Значит, $S(y) = 2y\sqrt{R^2 - y^2}$, $0 \leq y \leq R$.

$$\text{Поэтому } V = \int_0^R 2y\sqrt{R^2 - y^2} dy =$$

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - y^2} d(y^2) = \left[y^2 = t; \right.$$

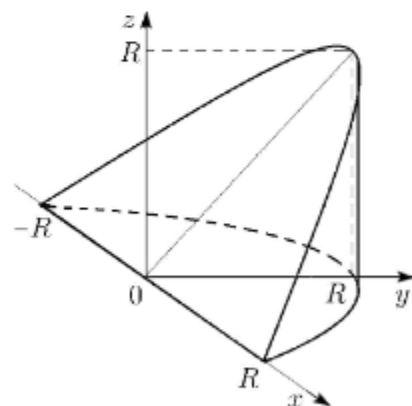


Рис. 55

$$y_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0, \quad y_2 = R \Rightarrow t_2 = R^2 \Big] = \int_0^{R^2} (R^2 - t)^{1/2} dt = \\ = -\frac{2}{3} (R^2 - t)^{3/2} \Big|_0^{R^2} = -\frac{2}{3} (0 - R^3) = \frac{2}{3} R^3.$$

Пример 10.43. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой $y = e^{-2x}$, $0 \leq x < +\infty$, и осью Ox , вокруг: а) оси Ox ; б) оси Oy .

Решение.

$$\text{а) } V_x = \pi \int_0^{+\infty} y^2(x) dx = \pi \int_0^{+\infty} e^{-4x} dx = -\frac{e^{-4x}}{4} \pi \Big|_0^{+\infty} = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{б) } V_y = 2\pi \int_0^{+\infty} xy(x) dx = 2\pi \int_0^{+\infty} xe^{-2x} dx = \left[u = x, \quad dv = \right. \\ \left. e^{-2x} dx \Rightarrow du = dx, \quad v = -\frac{e^{-2x}}{2} \right] = 2\pi \left(-\frac{xe^{-2x}}{2} \Big|_0^{+\infty} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx \right) = 2\pi \left(0 - \frac{1}{4} e^{-2x} \Big|_0^{+\infty} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиками непрерывных функций $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $y_2(x) \geq y_1(x) \geq 0$, $x \in [a; b]$, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx.$$

Пример 10.44. Криволинейная трапеция ограничена дугой параболы $y = 4 - x^2$, отрезком $[-2; 0]$ оси Ox и отрезком прямой $y = 3x$. Найти объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Ox .

Решение. Найдем абсциссу x_c точки C пересечения параболы $y = 4 - x^2$ и прямой $y = 3x$:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow 4 - x^2 = 3x \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = -4.$$

Нам подходит $x = 1$.

Искомый объем равен разности объемов V_1 и V_2 тел, образованных при вращении фигур $ABCD$ и OCD (рис. 56). Тогда

$$V_1 = \pi \int_{-2}^1 (4 - x^2)^2 dx =$$

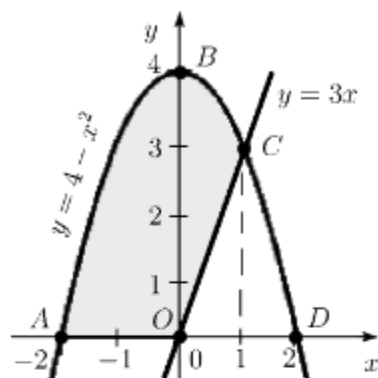


Рис. 56

$$= \pi \int_{-2}^1 (16 - 8x^2 + x^4) dx = \frac{153}{5}\pi, \quad V_2 = \pi \int_0^1 (3x)^2 dx = 3\pi x \Big|_0^1 = 3\pi.$$

Следовательно, объем рассматриваемого тела вращения

$$V = V_1 - V_2 = \frac{138}{5}\pi.$$

Пример 10.45. Найти объем тела, образованного при вращении круга $x^2 + (y - b)^2 \leq b^2$ вокруг оси Ox .

Решение. Дуги AOC и ABC (рис. 57) являются графиками функций $y_1(x) = b - \sqrt{b^2 - x^2}$ и $y_2(x) = b + \sqrt{b^2 - x^2}$ соответственно. В силу симметрии криволинейной трапеции относительно оси Oy объем найдем следующим образом:

$$V = 2\pi \int_0^b (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx =$$

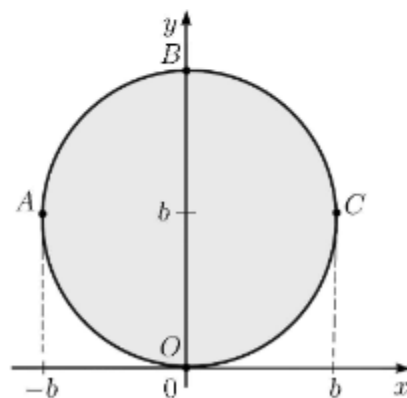


Рис. 57

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^b (b^2 + 2b\sqrt{b^2 - x^2} + b^2 - x^2 - (b^2 - 2b\sqrt{b^2 - x^2} + b^2 - x^2)) dx = \\
&2\pi \int_0^b 4b\sqrt{b^2 - x^2} dx = 8\pi b \int_0^b \sqrt{b^2 - x^2} dx = \left[\text{например, замена} \right. \\
&x = b \sin t, \quad dx = b \cos t dt, \quad \sqrt{b^2 - x^2} = b \cos t, \text{ так как } 0 \leq t \leq \\
&\left. \leq \frac{\pi}{2} \right] = 8\pi b \int_0^{\pi/2} b^2 \cos^2 t dt = 8\pi b^3 \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = 2\pi^2 b^3.
\end{aligned}$$

Упражнение 10.10. Найти объем тела, образованного вращением указанной криволинейной трапеции.

1. $y = \sin 2x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi/2$, вокруг оси Ox .
(Ответ: $\frac{\pi^2}{4}$).
2. $y = \sqrt{x}e^{-x}$, $y = 0$, $x = 2$, вокруг оси Ox .
(Ответ: $\frac{\pi}{4}(1 - 5e^{-4})$).
3. $y = 2x - x^2$, $y = 0$, вокруг оси Oy .
(Ответ: $\frac{8\pi}{3}$).
4. $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$, вокруг оси Ox .
(Ответ: $\frac{5\pi}{6}$).
5. $y = e^{x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, вокруг оси Oy .
(Ответ: $\pi(e - 1)$).

Упражнение 10.11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями.

1. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $|z| = 5$.
(Ответ: 60π).
2. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$, $|z| = 3$.
(Ответ: 126π).
3. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = -1$, $z = 5$.
(Ответ: 135π).

10.4.4. Вычисление площадей поверхностей вращения

Пусть $y = f(x)$ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция. Для вычисления площади S поверхности, образованной при вращении графика функции $f(x)$ вокруг оси Ox , используется формула

$$S_x = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

Пусть в полуплоскости $y \geq 0$ кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta],$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые на отрезке $[\alpha; \beta]$ функции. Поверхность, образованная при вращении данной кривой вокруг оси Ox , имеет площадь

$$S_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Если кривая расположена в полуплоскости $y \leq 0$, то

$$S_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Пусть $r(\varphi)$ — непрерывно дифференцируемая на $[\alpha; \beta]$ функция. Поверхность, образованная при вращении вокруг полярной оси кривой $r = r(\varphi)$, $0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi$, имеет площадь

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} \sin \varphi d\varphi.$$

При этом же условии площадь поверхности, образованной при вращении вокруг луча $\varphi = \pi/2$ кривой $r = r(\varphi)$, $-\pi/2 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi/2$, можно найти по формуле

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} \cos \varphi d\varphi.$$

Пример 10.46. Найти площадь S поверхности, образованной при вращении вокруг оси Ox кривой $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$.

Решение. Отметим, что кривая задана явно. Следовательно, $y' = 3x^2$, $1 + y'^2 = 1 + 9x^4$.

$$\text{Тогда } S = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \frac{2\pi}{4} \int_0^1 \sqrt{1 + 9x^4} dx^4 =$$

$$\left[x^4 = t \right] = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sqrt{1 + 9t} dt = \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

Пример 10.47. Найти площадь S поверхности, образованной при вращении вокруг оси Oy кривой $x = \operatorname{ch} y$, $\ln 2 \leq y \leq \ln 3$.

$$\text{Решение. } S = 2\pi \int_{\ln 2}^{\ln 3} x(y) \sqrt{1 + x'^2(y)} dy. \text{ Поскольку } x' =$$

$$\operatorname{sh} y, \quad 1 + x'^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y, \quad \text{то } S =$$

$$2\pi \int_{\ln 2}^{\ln 3} \operatorname{ch} y \operatorname{ch} y dy = 2\pi \int_{\ln 2}^{\ln 3} \operatorname{ch}^2 y dy = \frac{2\pi}{2} \int_{\ln 2}^{\ln 3} (\operatorname{ch} 2y + 1) dy =$$

$$\frac{\pi}{2} \operatorname{sh} 2y \Big|_{\ln 2}^{\ln 3} + \pi y \Big|_{\ln 2}^{\ln 3} = \frac{\pi}{2} (\operatorname{sh} 2 \ln 3 - \operatorname{sh} 2 \ln 2) + \pi (\ln 3 - \ln 2) =$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{e^{2 \ln 3} - e^{-2 \ln 3} - e^{2 \ln 2} + e^{-2 \ln 2}}{2} + \pi \ln \frac{3}{2} = \frac{\pi}{4} \left(9 - \frac{1}{9} - 4 + \frac{1}{4} \right) +$$

$$+ \pi \ln \frac{3}{2} = \frac{5\pi}{144} \cdot 37 + \pi \ln \frac{3}{2} = \frac{\pi}{144} \left(185 + 144 \ln \frac{3}{2} \right).$$

Пример 10.48. Найти площадь S поверхности, полученной при вращении кривой $x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{2/3}$ вокруг оси Ox .

Решение. Запишем параметрическое уравнение астроида (см. пример 10.36):
$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$
 Отметим,

что требуемая поверхность получится при вращении только части кривой, лежащей в полуплоскости $y \geq 0$, чему соответствует $0 \leq t \leq \pi$. А учитывая симметрию относительно оси Oy , достаточно рассмотреть $0 \leq t \leq \pi/2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S_x &= 2\pi \cdot 2 \int_0^{\pi/2} 2 \sin^3 t \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \left[\text{см. пример 10.36} \right. \\ &\left. \text{при } a = 2 \right] = 8\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cdot 6 \cos t \sin t dt = 48 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t d(\sin t) = \\ &= \frac{48}{5} \sin^5 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{48}{5} \pi. \end{aligned}$$

Пример 10.49. Найти площадь S поверхности, образованной при вращении кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$ вокруг полярной оси.

Решение. Для получения требуемой поверхности вращаем верхнюю часть кривой (см. пример 10.34), для которой $0 \leq \varphi \leq \pi$ и $\sqrt{r^2 + r'^2} = 2a \cos \frac{\varphi}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{В результате получим } S &= 2\pi \int_0^{\pi} a(1 + \cos \varphi) 2a \cos \frac{\varphi}{2} \times \\ &\times \sin \varphi d\varphi = 4\pi a^2 \int_0^{\pi} 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 16\pi a^2 \times \\ &\times \int_0^{\pi} \cos^4 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 32\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -32\pi a^2 \times \end{aligned}$$

$$\times \int_0^{\pi} \cos^4 \frac{\varphi}{2} d\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right) = -32\pi a^2 \frac{\cos^5 \frac{\varphi}{2}}{5} \Big|_0^{\pi} = -\frac{32}{5}\pi a^2(0 - 1) = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

Упражнение 10.12. Найти площадь S поверхности, образованной при вращении кривой L .

1. $L: y^2 = 4x$, $0 \leq x \leq 3$, вокруг оси Ox .

(Ответ: $\frac{56\pi}{3}$).

2. $L: 3x = 4 \cos y$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq 0$, вокруг оси Oy

(Ответ: $\frac{\pi}{9}(20 + 9 \ln 3)$).

3. $L: r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ вокруг лучей $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

(Ответ: $4\pi a^2(2 - \sqrt{2})$ и $4\sqrt{2}\pi a^2$).

4. $L: x^2 + (y - b)^2 = a^2$, $b \geq a > 0$, вокруг оси Ox .

(Ответ: $4\pi^2 ab$).

Задачи для индивидуальных и контрольных заданий

10.1. Используя теорему Барроу, решить следующие задачи.

1. Найти производную функции $\Phi(x) = \int_3^{\sqrt{x}} \frac{\sin 2t}{t} dt$.

(Ответ: $\Phi'(x) = \frac{\sin 2\sqrt{x}}{2x}$).

2. Найти производную функции $\Phi(x) = \int_{1/x}^{x^2} \cos t^2 dt$.

(Ответ: $\Phi'(x) = 2x \cos x^4 + \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x^2}$).

3. Найти производную $y'(x)$, если $x = \int_5^t \frac{\ln \tau}{\tau^2} d\tau$, $y = \int_4^{\ln t} e^\tau d\tau$
 ($t > 1$).

(Ответ: $y'(x) = t^2 / \ln t$).

4. Найти производную $y'(x)$, если $\int_0^y e^{-t^2} dt + \int_0^{x^2} \ln^2 t dt = 3$.

(Ответ: $y'(x) = -2x \ln^2 x^2 e^{y^2}$).

5. Найти производную $y'(x)$, если $x = \int_0^t e^\tau \cos \tau d\tau$, $y = \int_0^t e^\tau \sin \tau d\tau$.

(Ответ: $y'(x) = \frac{1}{e^{t \cos^3 t}}$).

6. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{5x^2 - 1} \int_0^2 \left(\pi - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{1+t} \right) dt$.

(Ответ: $\frac{1}{\ln 5}$).

7. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (\pi + 2 \operatorname{arctg} t^4) dt$.

(Ответ: 2π).

8. Исследовать на монотонность функцию

$$\Phi(x) = \int_3^x \frac{2t^2 - 7t + 3}{6t^2 + 1} e^{2t} dt.$$

(Ответ: возрастает на промежутках $(-\infty; 1/2)$ и $(3; +\infty)$,
 убывает на промежутке $(1/2; 3)$).

9. Исследовать на экстремум функцию

$$\Phi(x) = \int_0^{x^2} \frac{t^2 - 5t + 4}{2 + e^{3t}} dt.$$

(Ответ: $x = -2$; 0 ; 2 — точки локального минимума,
 $x = -1$; $+1$ — точки локального максимума).

10. Исследовать направление выпуклости и найти точки перегиба функции

$$f(x) = \int_e^x \frac{t}{\ln t} dt \text{ при } x > 1.$$

(Ответ: вогнута на промежутке $(1; e)$,
выпукла на промежутке $(e; +\infty)$, $x = e$ — точка перегиба).

10.2. С помощью определенного интеграла вычислить предел числовой последовательности S_n при $n \rightarrow \infty$.

$$1. S_n = \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$$

(Ответ: $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$; $f(x) = \sqrt{1+x}$ на отрезке $[0; 1]$).

$$2. S_n = \frac{1}{n} \left(\sin^2 \frac{\pi}{4n} + \sin^2 \frac{2\pi}{4n} + \dots + \sin^2 \frac{n\pi}{4n} \right).$$

(Ответ: $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$; $f(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{4}$ на отрезке $[0; 1]$).

$$3. S_n = \operatorname{tg} \frac{1}{n} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3n} + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} + \dots + \operatorname{tg} \frac{(n-1)\pi}{3n} \right).$$

(Ответ: $\frac{3}{\pi} \ln 2$; $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{3}$ на отрезке $[0; 1]$).

$$4. S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+1}.$$

(Ответ: $\ln 2$; $f(x) = \ln(1+x)$ на отрезке $[0; 1]$).

$$5. S_n = n \left(\frac{1}{3n^2 + 1} + \frac{1}{3n^2 + 2^2} + \dots + \frac{1}{3n^2 + n^2} \right).$$

(Ответ: $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$; $f(x) = \frac{1}{3+x^2}$ на отрезке $[0; 1]$).

$$6. S_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}}.$$

(Ответ: $\frac{\pi}{6}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ на отрезке $[0; 1]$).

$$7. S_n = \frac{3}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right).$$

(Ответ: 2; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ на отрезке $[0; 3]$).

$$8. S_n = \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}.$$

(Ответ: $\frac{3}{4}$; $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на отрезке $[0; 1]$).

$$9. S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \left(1 + \frac{k}{n} \right) \sin \frac{\pi}{n}.$$

(Ответ: $\frac{5\pi}{6}$; $f(x) = \pi(x+x^2)$ на отрезке $[0; 1]$).

$$10. S_n = n^2 \left(\frac{1}{(n^2+1)^2} + \frac{2}{(n^2+2^2)^2} + \dots + \frac{n}{(n^2+n^2)^2} \right).$$

(Ответ: $\frac{1}{4}$; $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ на отрезке $[0; 1]$).

10.3. Вычислить определенные интегралы.

$$1. \int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2(x-1)} dx.$$

(Ответ: $2 \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{2}$).

$$2. \int_{1/4}^{1/2} \arcsin 2x dx.$$

(Ответ: $\frac{5\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{4}$).

$$3. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

(Ответ: $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$).

$$4. \int_0^3 \sqrt{\frac{x}{6-x}} dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } 3(\frac{\pi}{2} - 1)).$$

$$5. \int_2^4 \frac{x^3 dx}{x^3 - 3x + 2}. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{4}{9}(5 + 2 \ln 2)).$$

$$6. \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1-x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } 3 \ln(\sqrt{3} + 2) - 2\sqrt{3}).$$

$$7. \int_0^{\pi/2} (2 \cos^2 x - 3x \sin x) dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{\pi}{2} - 3).$$

$$8. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}).$$

$$9. \int_{1/e}^1 \frac{\ln x + 2}{x \ln x + 3x} dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } 1 - \ln \frac{3}{2}).$$

$$10. \int_0^1 x^9 \sqrt{4-3x^5} dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{94}{675}).$$

$$11. \int_0^{2 \ln 2} \frac{2e^{2x} + 3e^x}{3e^x + 2} dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } 2 + \frac{5}{9} \ln \frac{14}{5}).$$

$$12. \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

$$13. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{\pi}{6} + \frac{8\sqrt{3}}{27}).$$

14. $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}} dx.$ (ОТВЕТ: $\frac{\pi^2}{4}$).
15. $\int_0^2 x^2 \ln x dx.$ (ОТВЕТ: $\frac{8 \ln 2}{3} - \frac{7}{9}$).
16. $\int_0^1 \frac{x^2 + 3x}{(x+1)(x^2+1)} dx.$ (ОТВЕТ: $\frac{\pi}{4}$).
17. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx.$ (ОТВЕТ: $4 - \pi$).
18. $\int_0^6 \sqrt{6x - x^2} dx.$ (ОТВЕТ: $\frac{9}{2}\pi$).
19. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx.$ (ОТВЕТ: $\pi\sqrt{2} - 4$).
20. $\int_{3/4}^2 \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$ (ОТВЕТ: $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$).
21. $\int_{-1}^2 |x^2 - 1| dx.$ (ОТВЕТ: $\frac{8}{3}$).
22. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2 \cos^2 x}.$ (ОТВЕТ: $\frac{\pi}{2\sqrt{15}}$).
23. $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx.$ (ОТВЕТ: 4π).

$$24. \int_{+0}^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{1}{\ln 2}).$$

$$25. \int_{-10}^{10} 1(3x^2 - 11x - 4) dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } 15\frac{2}{3}).$$

$$26. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 - \sin x}. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}).$$

$$27. \int_0^3 x^2 \sqrt{9 - x^2} dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{81}{16}\pi).$$

$$28. \int_{1/4}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1 + 4x^2}}. \quad (\text{ОТВЕТ: } \ln \frac{\sqrt{5} + 3}{2}).$$

$$29. \int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{\pi}{2}(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2})).$$

$$30. \int_1^5 \frac{dx}{x + \sqrt{2x - 1}}. \quad (\text{ОТВЕТ: } 2(\ln 2 - \frac{1}{4})).$$

$$31. \int_{-2}^2 \frac{dx}{(4 + x^2)^2}. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{\pi + 2}{32}).$$

$$32. \int_{-1}^4 \operatorname{sgn}(x^2(x - 2)) dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } -1).$$

$$33. \int_0^1 \frac{x^3 \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx. \quad (\text{ОТВЕТ: } \frac{7}{9}).$$

10.4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми.

1. $y = \sqrt{x+1}$, $x+2y+1=0$, $y-x+5=0$. (Ответ: $\frac{39}{2}$).

2. $3y+x^2=2x+3$, $x+3y=3$. (Ответ: $\frac{3}{2}$).

3. $y = \ln(x+2)$, $y = \frac{x+1}{e-1}$. (Ответ: $\frac{1}{2}(3-e)$).

4. $y = -x^3$, $y = \frac{8}{3}\sqrt{x}$, $y = 8$. (Ответ: 36).

5. $x^2+y^2=8$, $2y=x^2$, $y \geq 0$. (Ответ: $2\pi + \frac{4}{3}$).

6. $y = x - x^2$, $y = x\sqrt{1-x}$. (Ответ: 0, 1).

7. $y = \operatorname{tg} x$, $y = \frac{2}{3} \cos x$, $x = 0$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$).
(Ответ: $\frac{1}{3} + \ln \frac{\sqrt{3}}{2}$).

8. $r = 4 \cos 3\varphi$, $r = 2$ (r, φ — полярные координаты, $r \geq 2$).
(Ответ: $\frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$).

9. $r = 3 \sin \varphi$, $r = \sqrt{3} \cos \varphi$ ($(0; 1) \in D$). (Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{4}$).

10. $r^2 = 16 \cos 2\varphi$. (Ответ: 16).

11. $r = 2 - \cos \varphi$, $r = \cos \varphi$. (Ответ: $\frac{17\pi}{4}$).

12. $r = 2a|\operatorname{tg} \varphi|$, $r = \frac{a}{\cos \varphi}$. (Ответ: $(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3})a^2$).

13. $r^2 = (1 - 2 \cos 2\varphi)a^2$, $r = a$ ($r \leq a$).
(Ответ: $\frac{a^2}{3}(2\pi + 3\sqrt{3} - 6)$).

14. $r = \sqrt{3}a \sin \varphi$, $r = 2a \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ ($r \geq 2a \sin^2 \frac{\varphi}{2}$).
(Ответ: $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$).

10.5. Найти длину дуги кривой.

1. $y = \ln \frac{3}{2x}$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$. (Ответ: $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$).

2. $y^2 = 8x$, $-4 \leq y \leq 4$. (Ответ: $4(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1))$).

3. $y = \frac{x}{6}\sqrt{x+12}$, $-11 \leq x \leq -3$. (Ответ: $\frac{25}{3}$).

4. $y = \sqrt{x^2 - 32} + 8 \ln(x + \sqrt{x^2 - 32})$, $6 \leq x \leq 9$.
(Ответ: $\sqrt{2}(5 + 4 \ln 2)$).

5. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$, $0 \leq x \leq \frac{9}{16}$. (Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$).

6. $y = \ln(3x^2 - 3)$, $-3 \leq x \leq -2$. (Ответ: $1 + \ln \frac{3}{2}$).

7. $x = 1 - t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$ (длину петли). (Ответ: $4\sqrt{3}$).

8. $x = t + 1$, $y = t^2 + 2t$ (длину части, отсеченной осью Ox).
(Ответ: $\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5})$).

9. $x = t - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t$, $y = 2 \operatorname{ch} t$, $0 \leq t \leq 2$. (Ответ: $\operatorname{sh}^2 2$).

10. $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$, $0 \leq t \leq 1$.
(Ответ: $2(e - 1)$).

11. $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ (в первом квадранте). (Ответ: $\frac{13}{3}$).

12. $x = 8at^2$, $y = 3a(2t^2 - t^4)$, $y \geq 0$. (Ответ: $48a$).

13. $r = 7(1 - \sin \varphi)$, $-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$. (Ответ: $14(\sqrt{3} - 1)$).

14. $r = 3\varphi^2$, $1 \leq \varphi \leq 4$. (Ответ: $35\sqrt{5}$).

15. $r = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}$. (Ответ: $\frac{16}{3}a$).

16. $r = \sqrt{3} \cos^2 \varphi$. (Ответ: $4\sqrt{3} + 2 \ln(2 + \sqrt{3})$).

17. $r = 3e^{3\varphi/4}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. (Ответ: $10 \operatorname{sh} \frac{3\pi}{8}$).

$$18. x = t, y = 2t^2, z = \frac{8}{3}t^3, 0 \leq t \leq 1. \quad (\text{Ответ: } \frac{11}{3}).$$

$$19. x = \frac{t}{2}, y = \frac{\sqrt{t} \sin t}{2}, z = \frac{\sqrt{t} \cos t}{2}, 4 \leq t \leq 9. \quad (\text{Ответ: } \frac{41}{6}).$$

$$20. x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, z = \cos 2t, 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (\text{Ответ: } 10).$$

10.6. а) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми.

$$1. 2x + y + x^2 = 0, x + y = 0. \quad (\text{Ответ: } \frac{\pi}{5}).$$

$$2. x = \sqrt{y-2}, y = 4 - \sqrt{x}, x = 0. \quad (\text{Ответ: } \frac{169}{30}\pi).$$

$$3. y = \sin x, y = \cos x, y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \quad (\text{Ответ: } \frac{\pi(\pi-2)}{4}).$$

$$4. y = e^x + 6, y = e^{2x}, x = 0. \quad (\text{Ответ: } 4\pi(2 + 9 \ln 3)).$$

$$5. y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x-3}}, y = 0, -1 \leq x \leq 1. \quad (\text{Ответ: } \pi(6 - 8 \ln 2)).$$

$$6. y = \frac{\ln x}{x}, y = 0, x = e, 1 \leq x \leq e. \quad (\text{Ответ: } \pi(2 - 5e^{-1})).$$

$$7. y = \arcsin x, y = 0, x = 1. \quad (\text{Ответ: } \frac{\pi}{4}(\pi^2 - 8)).$$

б) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми.

$$8. y = \operatorname{sh} x, y = \frac{3}{4}, x = 0. \quad (\text{Ответ: } \frac{\pi}{4}(3 \ln^2 2 - 10 \ln 2 + 6)).$$

$$9. y = \operatorname{arctg} x, x = -1, y = 0. \quad (\text{Ответ: } \frac{\pi}{2}(\pi - 2)).$$

$$10. y = \frac{2x-5}{x-3}, x = 5, y = 3. \quad (\text{Ответ: } \pi(7 - 6 \ln 2)).$$

$$11. y = x, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 2. \quad (\text{Ответ: } \frac{8\pi}{3}).$$

$$12. y = \arcsin x, \quad y = 0, \quad x = 1. \quad (\text{Ответ: } \frac{\pi^2}{4}).$$

$$13. y = x^2 - 5x + 6, \quad y = 0. \quad (\text{Ответ: } \frac{5\pi}{6}).$$

$$14. y = e^{-3x}, \quad y = 0, \quad x = 1. \quad (\text{Ответ: } \frac{4\pi}{9}e^{-3}).$$

10.7. Найти площадь поверхности, образованной при вращении заданной кривой вокруг указанной оси.

$$1. y = \frac{\sqrt{x}}{6}(x - 12), \quad 0 \leq x \leq 12, \quad \text{вокруг оси } Ox. \quad (\text{Ответ: } 48\pi).$$

$$2. x^2 = 4 + y \quad \text{для } y \leq 2, \quad \text{вокруг оси } Oy. \quad (\text{Ответ: } \frac{62}{3}\pi).$$

$$3. x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{вокруг оси } Ox. \quad (\text{Ответ: } \frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^\pi - 2)).$$

$$4. 4x^2 + y^2 = 4, \quad \text{вокруг оси } Oy. \quad (\text{Ответ: } 2\pi(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}})).$$

$$5. x = 5(t^2 + 1), \quad y = \frac{5t}{3}(3 - t^2), \quad |t| \leq \sqrt{3}, \quad \text{вокруг оси } Oy. \quad (\text{Ответ: } 480\pi\sqrt{3}).$$

$$6. x = \sqrt{2} \sin t, \quad y = \frac{1}{4} \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{вокруг оси } Ox. \quad (\text{Ответ: } \frac{\pi}{2}).$$

$$7. r = 2a \sin \varphi \quad \text{вокруг полярной оси.} \quad (\text{Ответ: } 4\pi^2 a^2).$$

Основная

Богданов, Ю.С. Лекции по математическому анализу: в 2 ч. / Ю.С. Богданов. Минск, 1974, 1978.

Богданов, Ю.С. Математический анализ / Ю.С. Богданов, О.А. Кастрица, Ю.Б. Сыроид. М., 2003.

Леваков, А.А. Математический анализ / А.А. Леваков. Минск, 2014.

Альсевич, Л.А. Математический анализ. Последовательности и функции. Практикум / Л.А. Альсевич, С.Г. Красовский, А.Ф. Наумович. Минск, 2019.

Дополнительная

Астровский, А.И. Высшая математика: в 2 т. / А.И. Астровский, М.П. Дымков. Минск, 2009, 2011.

Воднев, В.Т. Основные математические формулы / В.Т. Воднев, А.Ф. Наумович, Н.Ф. Наумович. Минск, 1995.

Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. М., 1990.

Кастрица, О.А. Математический анализ. Ряды и несобственные интегралы / О.А. Кастрица, С.А. Мазаник, А.Ф. Наумович, Н.Ф. Наумович. Минск, 2015.

Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. М., 1966, 1970, 1979.

Основные обозначения.....	3
Предисловие.....	5
Глава 1. Метод математической индукции	6
Глава 2. Сочетания	14
Глава 3. Формула Ньютона	18
Глава 4. Предел последовательности	25
4.1. Бесконечно малые последовательности.....	26
4.2. Сходящиеся последовательности.....	27
4.3. Бесконечно большие последовательности.....	29
4.4. Эталонные пределы.....	30
4.5. Нахождение предела по определению.....	30
4.6. Примеры вычисления пределов с использованием эталонных пределов.....	33
4.7. Подпоследовательности.....	34
4.8. Эквивалентные последовательности.....	35
4.9. Раскрытие неопределенностей.....	36
4.10. Число e	44
4.11. Критерий Коши сходимости последовательности.....	46
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий</i>	50
Глава 5. Функция. Предел функции	60
5.1. Отображение множеств.....	60
5.2. Числовые функции.....	62
5.3. Обратная функция.....	70
5.4. Композиция функций.....	71
5.5. График функции.....	71
5.6. Графики некоторых функций.....	76
5.6.1. Линейная функция.....	76
5.6.2. Квадратичная функция.....	76
5.6.3. Степенная функция.....	77

5.6.4. Показательная функция.....	78
5.6.5. Логарифмическая функция.....	79
5.6.6. Тригонометрические функции.....	79
5.6.7. Обратные тригонометрические функции.....	82
5.6.8. Гиперболические функции.....	86
5.6.9. Обратные гиперболические функции.....	88
5.7. Элементарные функции.....	92
5.8. Определение предела функции.....	93
5.9. Основные свойства пределов функции.....	97
5.10. Односторонние пределы.....	101
5.11. Сравнение функций.....	103
5.12. Замечательные пределы.....	105
5.13. Эквивалентные функции.....	108
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий.....</i>	<i>119</i>
Глава 6. Непрерывность функций.....	128
6.1. Непрерывные функции.....	128
6.2. Классификация точек разрыва.....	130
6.3. Локальные свойства непрерывных функций.....	135
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий.....</i>	<i>150</i>
Глава 7. Дифференцируемость функций.....	166
7.1. Дифференцируемые функции.....	166
7.2. Дифференциал функции.....	167
7.3. Производная функции.....	168
7.4. Правила дифференцирования.....	170
7.4.1. Производные арифметических комбинаций.....	170
7.4.2. Дифференцирование композиции.....	172
7.4.3. Дифференцирование обратной функции.....	174
7.4.4. Производные основных элементарных функций.....	176
7.4.5. Бесконечные и односторонние производные.....	180
7.5. Производные и дифференциалы высших порядков.....	187
7.5.1. Производные высших порядков элементарных функций.....	189
7.5.2. Дифференциалы высших порядков.....	191

7.5.3. Производные и дифференциалы высших порядков арифметических комбинаций.....	192
7.6. Производные функций, заданных неявно.....	197
7.7. Производные функций, заданных параметрически.....	200
7.8. Приложения производной.....	203
7.8.1. Геометрические приложения производной.....	203
7.8.2. Правило Лопиталья вычисления пределов функций...	210
7.9. Формула Тейлора.....	220
7.9.1. Представление функций по формуле Тейлора.....	220
7.9.2. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора — Пеано.....	226
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий.....</i>	<i>235</i>
Глава 8. Исследование функций с помощью производных.....	278
8.1. Стационарные точки функции.....	278
8.2. Монотонные функции.....	281
8.3. Локальный экстремум функции.....	283
8.4. Глобальный экстремум функции.....	289
8.4.1. Глобальный экстремум функции на отрезке.....	289
8.4.2. Глобальный экстремум функции на интервале.....	290
8.5. Выпуклые функции. Точки перегиба.....	292
8.6. Асимптоты функции.....	295
8.7. Построение схемы графика функции.....	299
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий.....</i>	<i>311</i>
Глава 9. Неопределенный интеграл.....	324
9.1. Первообразная. Неопределенный интеграл.....	324
9.2. Основные методы интегрирования.....	328
9.2.1. Введение множителя под знак дифференциала.....	328
9.2.2. Внесение функции под знак дифференциала.....	332
9.2.3. Выделение множителя из-под знака дифференциала...	334
9.2.4. Интегрирование по частям.....	336
9.3. Интегрирование рациональных функций.....	345
9.3.1. Простейшие рациональные функции.....	345

9.3.2. Вычисление коэффициентов разложения рациональной функции на простейшие	347
9.3.3. Различные подходы к отысканию коэффициентов в разложении рациональной функции на простейшие ...	353
9.3.4. Вычисление неопределенных интегралов от рациональных функций	360
9.3.5. Метод Остроградского для выделения рациональной части	366
9.4. Интегрирование иррациональных функций	371
9.4.1. Интегрирование выражений вида $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)$...	371
9.4.2. Интегрирование выражений вида $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$. Подстановки Эйлера	375
9.4.3. Интегрирование биномиальных дифференциалов. Подстановки Чебышева	384
9.5. Интегрирование рационально-тригонометрических функций	387
9.5.1. Интегрирование выражений вида $R(\sin x, \cos x)$	387
9.5.2. Интегрирование выражений вида $\sin^m x \cos^n x$	393
9.5.3. Интегрирование выражений вида $\sin ax \cos bx$, $\sin ax \sin bx$, $\cos ax \cos bx$	395
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий</i>	396
Глава 10. Определенный интеграл	406
10.1. Интегральные суммы. Определение интеграла Римана	406
10.2. Свойства определенных интегралов	412
10.2.1. Линейность интеграла	412
10.2.2. Аддитивность интеграла	412
10.2.3. Монотонность интеграла (почленное интегрирование неравенств)	413
10.2.4. Оценки интегралов	414
10.2.5. Интегральная теорема о среднем	415
10.3. Вычисление определенных интегралов	417
10.3.1. Интеграл с переменным верхним пределом	417
10.3.2. Формула Ньютона — Лейбница	421
10.3.3. Замена переменной в определенном интеграле	426

10.3.4. Интегрирование по частям в определенном интеграле.....	429
10.3.5. Понятие несобственных интегралов.....	430
10.4. Приложения определенного интеграла.....	437
10.4.1. Площадь плоских фигур.....	437
10.4.2. Длина дуги кривой.....	442
10.4.3. Вычисление объемов тел.....	446
10.4.4. Вычисление площадей поверхностей вращения.....	452
<i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий.....</i>	<i>455</i>
Рекомендуемая литература.....	466